Den Term $f(x) = \varphi_{0;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}$ der Normalverteilung inhaltlich begründen

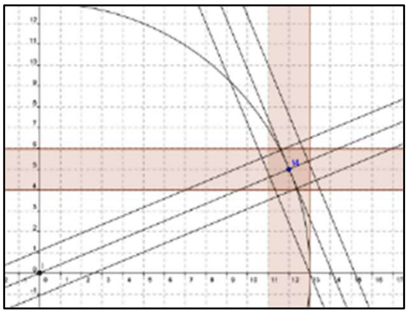
Wie Gauß seine Glockenfunktion fand und warum σ Standardabweichung heißt

Beim Pfeilewerfen geht man von folgenden Modellannahmen aus:
(i) die X- und Y- Koordinaten sind stochastisch voneinander unabhängig und
(ii) die Verteilung der Punkte ist rotationssymmetrisch zum Ursprung.
Wenn Sie auf der Grundlage dieser Annahmen Schritt für Schritt die Aussagen A-J begründen, haben Sie bewiesen, dass die Koordinaten normalverteilt sein müssen und mit K-N, dass die Pfeile am wahrscheinlichsten („standardmäßig") im Abstand D ≈ σ vom Ursprung landen, was die Bezeichnung „Standardabweichung" erklärt.

A: Die X- und Y- Koordinaten P(X;Y) werden durch die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte f beschrieben

B: Es gilt $P(x \leq X \leq x + dx) \approx f(x)dx$ und $P(y \leq Y \leq y + dy) \approx f(y)dy$

C: Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass der Pfeil im Quadrat mit Mittelpunkt M$(x; y)$ und Fläche $dx \cdot dy$ landet, beträgt
$P = f(x) \cdot dx \cdot f(y) \cdot dy = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dx \cdot f(0) \cdot dy$



D: Es gilt $f(x) \cdot f(y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot f(0)$

E: Es gilt $\frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{f(0)}$

F: $g(x) := \frac{1}{f(0)} \cdot f(\sqrt{x}) \Longrightarrow g(x^2) \cdot g(y^2) = g(x^2 + y^2) \Longrightarrow g(x) \cdot g(y) = g(x + y)$

G: $g(x) = a^x$

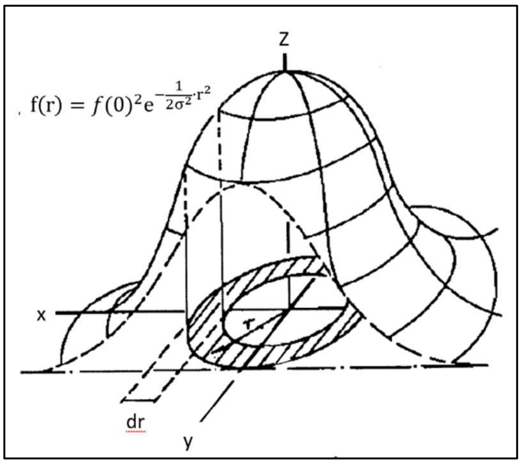
H: $f(x) = f(0) \cdot a^{(x^2)}$

I: $\sigma := \sqrt{\frac{-1}{2\,ln(a)}} \Longrightarrow f(x) = f(0) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}$

J: Integrieren der zweidimensionalen Verteilungsglocke über Kreisringe:

$$1 = f(0)^2 \cdot \int_0^\infty 2\pi r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2} dr = f(0)^2 \cdot 2\pi\sigma^2 \left[-e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}\right]_0^\infty$$
$$= f(0)^2 \cdot \sigma^2 \cdot 2\pi \Longrightarrow$$

$f(0) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} a^x \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}$



K: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil im Kreisring mit Radius r und Breite dr landet, ist $2\pi \cdot r \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2} dr = \frac{1}{\sigma^2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2} dr.$

L: Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Abstandes D vom Ursprung ist
$g(r) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}$

M: Am wahrscheinlichsten landet der Pfeil im Abstand ≈ σ vom Ursprung

N: Der Erwartungswert des Abstandes D ist etwas größer als der wahrscheinlichste Wert: $E(D) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty r^2 \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2} dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma$

Lösungsskizze:

A: folgt aus der **Rotationssymmetrie** (90°-Drehung)

B: gilt nach Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte

C: wegen Unabhängigkeit von X und Y gilt die Produktregel, zunächst für das ursprüngliche Koordinatensystem und dann auch für das gedrehte Koordinatensystem, bei dem P auf der (neuen) x-Achse liegt.

D: folgt aus C (beide Seiten durch dx·dy dividieren)

E: ergibt sich aus D

F: Durch Normieren und Substituieren erhält man aus f eine neue Funktion g, die – wenn man x=y einsetzt - die Funktionalgleichung der Exponentialgleichung erfüllt.

G: folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

H: Rücksubstitution

I: man definiert (rein formal) eine Variable σ, so dass sich mit ihrer Hilfe die Dichte „wie von der Normalverteilung gewohnt" schreiben lässt.

J: Um den Faktor f(0) zu bestimmen und das Auftreten der Kreiszahl π zu begründen, nutzt man aus, dass Wahrscheinlichkeitsdichten normiert sind. Man betrachte das Pfeilewerfen zweidimensional und schreibt zwecks geschlossener Integrierbarkeit den Term der Glocke u(x,y)=f(x)·f(y) als Funktion des Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

K: Die Wahrscheinlichkeit entspricht jetzt dem Volumen über einem Kreisring im Abstand r vom Mittelpunkt unter der zweidimensionalen Glocke

L: Nach Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte

M: Die Maximalstelle der Dichte g liegt bei σ

N: ergibt sich aus der Integration

Literatur:
W. Riemer: Stetige Zufallsgrößen: Mit Dartwerfen durch das Tor der Analysis in die Stochastik. PM 48 S. 20-24.
Ein hilfreiches Erklärvideo findet sich hier: https://youtu.be/cTyPuZ9-JZ0