



Warten auf das nächste „Äh“

Die Exponentialfunktion als Sprungbrett für einen Salto von der Analysis in die Stochastik

WOLFGANG RIEMER – WILFRIED HERGET

Integrale beschreiben Wirkungen und Bestände. Dass sie auch Wahrscheinlichkeiten beschreiben, wird in der Analysis konsequent verschwiegen. Damit wird den Lernenden die dritte Dimension der Integralrechnung vorenthalten. Das liegt wohl daran, dass man sich klassisch erst nach der Binomialverteilung über das Verschieben, Stauchen, Strecken von Säulendiagrammen optisch an die GAUßsche Glocke heranrobbt. Nur in engagierten Leistungskursen werden die hinter den diskreten Konturen steckenden Funktionen dann zu Wahrscheinlichkeitsdichten stetiger Zufallsgrößen umgedeutet – hier wird der Spieß umgedreht und top-down statt bottom-up gearbeitet. In einer einzigen Analysis-Doppelstunde wird die Bedeutung der Integralrechnung um die Dimension Wahrscheinlichkeit erweitert. Dieser Einstieg in stetige Zufallsgrößen klappt in jedem Grundkurs. Und er wird gekoppelt mit einem kurzweiligen Experiment, so dass man sich sein Leben lang gerne an Wahrscheinlichkeitsdichten erinnert – und das mit nachhaltig-unüberhörbarem Erfolg bei rhetorischen Herausforderungen.

1 Die Idee

Exponentialfunktionen gehören zum Fundament der Analysis. Ihre Integrale modellieren Wirkungen und Bestände. Das ist in jedem Kernlehrplan nachzulesen. Aber überraschen Sie Ihren Kurs in einer Analysis-Übungsstunde doch einmal mit einem Arbeitsblatt (Kasten 1) – ganz ohne Vorspann zu stetigen Zufallsgrößen. Nach einer kurzen Lese- und Verständigungsphase ist man bestens darüber informiert, wie (Exponential-) Funktionen neben Wirkungen und Beständen auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen definieren, die – tatsächlich – das Warten „auf alles Mögliche“ gut beschreiben. Und dann lassen Sie prüfen, wie gut das Modell passt: in einem Fünf-Minuten-Experiment!

Diese Doppelstunde ist ein Knaller – nicht nur für Referendarinnen und Referendare, die in ihrer Ausbildung zeigen müssen, dass sie verstanden haben, was Handlungsorientierung meint und worum es bei den WINTER'schen Grunderfahrungen geht. Das nächste Arbeitsblatt (Kasten 2) konkretisiert, wie eine heuristische Begründung der „Äh-Verteilung“ des auf den ersten Blick so überraschenden Phänomens aussehen kann. Man schließt so (auch mithilfe von Simulationen) Freundschaft mit stetigen Zufallsgrößen, deren sämtliche Werte – und das ist für Lernende „irre“ – mit unglaublichen 0 % Wahrscheinlichkeit auftreten ... und greift zurück auf die vertraute Pfadregel und $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \approx e^x$ für großes n . Ein weiteres Arbeitsblatt (Kasten 3) regt zu Begründungen an.

Die Exponentialfunktion in der Statistik

Arbeitsblatt 1

Die Mathematik arbeitet mit Modellen. In der Statistik fängt das Modellieren an mit dem Aufstellen von Wahrscheinlichkeiten. Und tatsächlich werden dort Funktionen dafür genutzt, Wahrscheinlichkeiten zu definieren. Wenn das „Warten auf irgendwas“ beschrieben werden soll, nutzt man in der Statistik erfolgreich Exponentialfunktionen. Und das geht so:

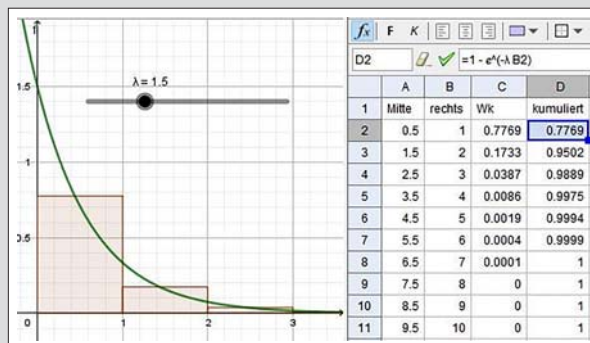
Wenn man bei der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot e^{-\lambda x}$ und $\lambda > 0$ speziell $c = \lambda$ setzt, dann erhält man $f_{\lambda}(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, und es gilt $\int_0^{\infty} f_{\lambda}(x) dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = 1$. (*)

(Diese 1 steht für die Wahrscheinlichkeit 100 %.)

Dann ordnet man jedem Intervall $[a; b]$ mit $a \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit $\int_a^b f_{\lambda}(x) dx = [-e^{-\lambda x}]_a^b$ zu.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit X , die man auf das „Irgendwas“ warten muss, zwischen a und b liegt, wird dann in diesem Modell beschrieben durch $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_{\lambda}(x) dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. (**)

Und immer gilt für jedes $c \geq 0$ und jedes $\lambda > 0$ – merkwürdig! – $P(X = c) = \int_c^c f_{\lambda}(x) dx = [-e^{-\lambda x}]_c^c = 0$. (***)



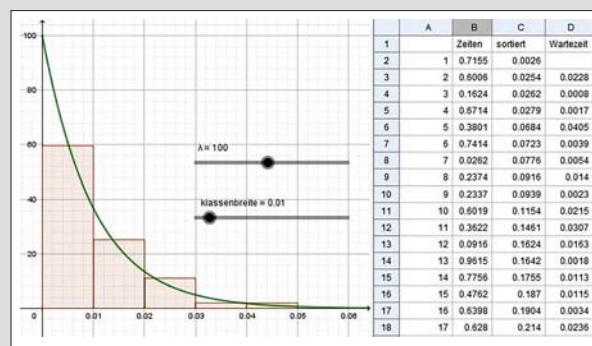
- Erklären Sie einander die Aussagen des Infotextes.
- Begründen Sie (*) und (**) und (***), ggf. unter Zuhilfenahme eines Rechenhilfsmittels.
- Stellen Sie die Beziehung her zwischen dem Text und den in der Abbildung sichtbaren Zahlen. Sie können sich vorstellen, dass die Abbildung (mithilfe von Wahrscheinlichkeiten) beschreibt, wie lange (gemessen in Jahrzehnten) ein neues Fahrrad von seinem Besitzer genutzt wird. Das „Irgendwas“ steht in diesem Kontext dann für das Verkaufen, Verschenken oder Verschrotten des Fahrrades.
- Hanna fragt nach der durchschnittlichen (in dem Modell erwarteten) Nutzungsdauer μ . Simon vermutet $\mu = 1/\lambda$. Wie könnten Sie Simons Antwort prüfen?
- Programmieren Sie eine „feinere“ Tabelle mit jährlicher Abstufung (Stufenbreite 0,1 – denn ein Jahr entspricht 0,1 Jahrzehnten) ... oder arbeitsteilig noch feiner, z.B. mit monatlicher Abstufung ... und überprüfen Sie so Simons Vermutung aus d), ruhig auch für andere Werte von λ .

Kasten 1. Info und erster Arbeitsauftrag

Eine überraschende Entdeckung

Arbeitsblatt 2

- Erzeugen Sie 100 Zufallsdezimalzahlen zwischen 0 und 1 (arbeitsteilig 200 zwischen 0 und 2, 300 zwischen 0 und 3). Die Zahlen stehen für zufällige Ereignis-Zeitpunkte, und der Quotient $\lambda = \frac{100}{1} = \frac{200}{2} = \frac{300}{3} = \dots$ ist die Ereignisdichte.
- Sortieren Sie die Zahlen aufsteigend, und bestimmen Sie die 99 (bzw. 199 bzw. 299, ...) Differenzen benachbarter Zeitpunkte. Diese Differenzen stehen dann für 99 (bzw. 199 bzw. 299, ...) Wartezeiten auf das nächste Ereignis.
- Stellen Sie die Wartezeiten in einem Histogramm dar. Prüfen und begründen Sie, dass der Mittelwert μ der Wartezeit in der Nähe von $\frac{1}{\lambda} = 0,01$ liegen muss.
- Vergleichen Sie das Histogramm mit dem Graphen von $f_{\lambda}(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, und stellen Sie eine Beziehung zum Arbeitsblatt 1 her.



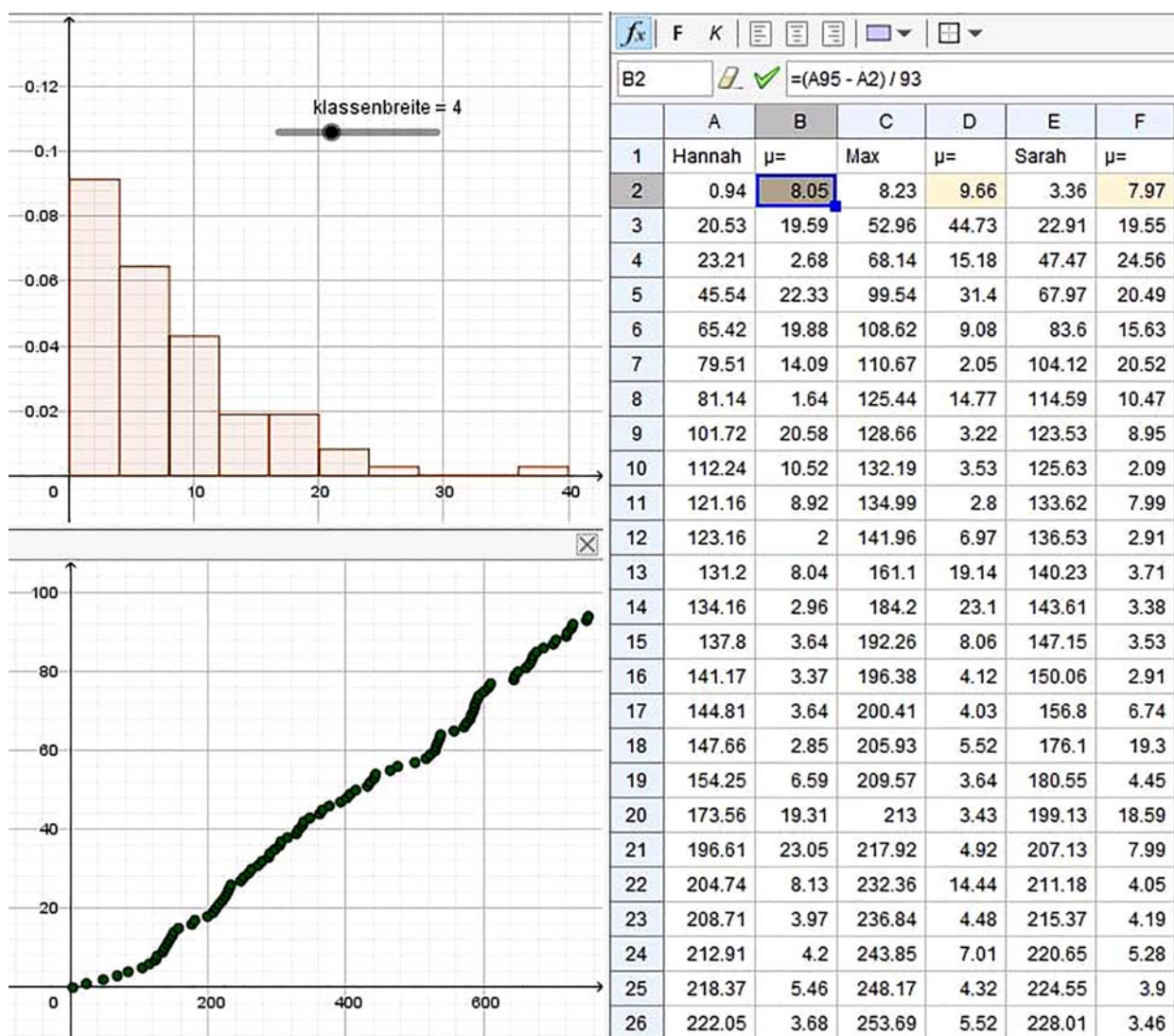
Kasten 2. Zweiter Arbeitsauftrag. Begründung über Simulationen

Die etwas anstrengende Begründung:

Arbeitsblatt 3

- a) Lassen Sie $\lambda = 100$ Zufallszahlen zufällig auf das Intervall $[0; 1]$ fallen. Begründen Sie mit der Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall $[0; x]$ keine Zufallszahl liegt, ist $1 - x^{100}$.
- b) Nun lässt man 200 Zufallszahlen auf das Intervall $[0; 2]$ fallen. Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall $[0; x]$ keine Zufallszahl liegt, ist nun $(1 - \frac{x}{2})^{2 \cdot 100}$; und wenn man $b \cdot 100$ Zufallszahlen auf das Intervall $[0; b]$ fallen lässt, liegen mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \frac{x}{b})^{b \cdot 100}$, $\approx e^{-100x} = e^{-\lambda x}$ keine Zahlen in $[0; x]$. Folgern Sie: Wenn eine Zahlengerade gleichmäßig mit $\lambda = 100$ Zufallszahlen je Einheit „bevölkert“ ist, wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zweier aufeinander folgender Zahlen („die Wartezeit“) zwischen a und b liegt, gegeben durch $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = \int_a^b f_{\lambda}(x) dx$

Kasten 3. Aufgaben zur Begründung



Hannah hat (in den Spalten A und B) in gut 750 Sekunden 93 „Ähs“ gestoppt ... also im Mittel ca. 8 s auf das nächste gewartet. Der weniger aufmerksame Max (Spalten C und D) entdeckte beim gleichen Video nur 82 „Ähs“ und kommt auf eine mittlere Wartezeit von knapp 10 s. Sarah (Spalten E, F) dagegen war noch etwas aufmerksamer als Hannah. Der untere Graph zeigt die Anzahl der von Hannah gezählten „Ähs“ in (annähernd linearer) Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden).

Abb. 1. Auswertung eines Erklärvideos zum KOLMOGOROV-SMIRNOV-Test

2 Fünf-Minuten-Experiment

Man braucht im Netz nicht lange nach „Äh“-gespickten Filmen zu suchen. Warum nicht gleich zwei Fliegen mit einer Klappe schlagen und ein passendes Analysis- oder Stochastik-Erklärvideo zum Untersuchungsgegenstand machen? In Abbildung 1 wird ein Video zur Erklärung des KOLMOGOROFF-SMIRNOV-Tests ausgewertet (<https://www.youtube.com/watch?v=IsgCI8uhQ6M>). Pädagogen nennen dies einen „didaktischen Doppeldecker“, bei dem der Inhalt gleichzeitig auf der Handlungsebene erfahrbar wird. Dahinter steckt die Absicht, Lernprozesse nachhaltiger zu gestalten, indem diese auch in einer Erfindung verankert werden (nach www.hochschuldidaktik.uzh.ch).

Und so geht das Experiment: Alle öffnen auf ihren Rechnern/ Tablets die Datei stopp.ggb, eine digitale Stoppuhr, die Zwischenzeiten stoppt und direkt in die Kalkulationstabelle überträgt. Die Datei steht in der Online-Ergänzung zum Download bereit. Der Versuchsleiter zählt 3 – 2 – 1 – ..., und bei 0 werden die Stoppuhren und das Video gestartet. Immer, wenn man ein Füllsel wie „Äh“ hört, speichert man den Zeitpunkt durch Klicken.

Alle sind natürlich sehr gespannt. Sofort anschließend, ohne dass man dazu auffordern müsste, vergleichen sie neugierig untereinander die Anzahlen und die Zeitpunkte entdeckter Füllsel. Die unvermeidbaren Unterschiede werden bewusst auskosten, denn auch erfahrenen Statistiktrendenden fallen solche Probleme, die mit jeder Datensammlung einhergehen, immer wieder „auf die Füße“. Und es sind nicht nur die Reaktionszeiten, die hier eine Rolle spielen, Schlafmüdigkeit und nervöses Fehl-klicken verfälschen die Daten. (Bei 30 Lernenden sind 25 unterschiedliche Füllselzahlen durchaus normal.) Wer es ganz genau wissen möchte, spult das Video sekundengenau zurück.

Dann werden die Wartezeiten auf das jeweils nächste „Äh“ als Zeitdifferenzen berechnet und durch Histogramme visualisiert – und nun sehen alle die Form „fallender Exponentialfunktionen“, wie gewünscht. Nicos Kommentar, unvergesslich: „Deswegen heißen die ja auch Äh-Funktionen ...“ und wer sich abseits der Mathematik für literarische Aspekte der Ähs interessiert, wird fündig bei SUTER & STUCKARD-BAREE (2021).

3 Modellvalidierung

Zur Validierung des Exponentialverteilungsmodells und zur Verständniskontrolle von Arbeitsblatt 1 dient der folgende Arbeitsauftrag.

- Berechnen Sie in Ihrer Kalkulationstabelle den Mittelwert der Wartezeiten vom ersten auf das zweite, vom zweiten auf das dritte, ... vom vorletzten (dem $(n-1)$ -ten) auf das letzte (das n -te) „Äh“ (=Mittelwert(B3:B95) in Arbeitsblatt 1).
- Die schlaue Nina spricht wieder in Rätseln:

„Die Signaldichte $\lambda = \frac{\text{Anzahl der Füllsel}}{\text{verstrichene Zeit}}$ entspricht beim

Radfahren der Durchschnittsgeschwindigkeit – und ist der Kehrwert der mittleren Wartezeit auf das nächste „Äh“, was beim Radeln der Zeit für den nächsten km entspricht.“

Erklären Sie, was Nina meinen könnte, und rechnen Sie nach.

- Zeichnen Sie den Graphen zu $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, und berechnen Sie in dem Exponentialverteilungsmodell (Arbeitsblatt 1) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man $0 < X \leq 4$ bzw. $4 < X \leq 8$ bzw. $8 < X \leq 12$ usw. Sekunden auf das nächste „Äh“ warten muss.
- Zählen Sie Ihre Wartezeiten aus und vergleichen Sie die relativen Häufigkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten.

Noch pfiffiger gestaltet sich (natürlich nur im vertiefenden Stochastik-Leistungskurs) die Überprüfung des Exponentialmodells mithilfe von Verteilungsfunktionen. Man plottet die empirische Verteilungsfunktion, die dadurch entsteht, dass man jeder gemessenen Wartezeit x den Anteil $H(x)$ noch größerer

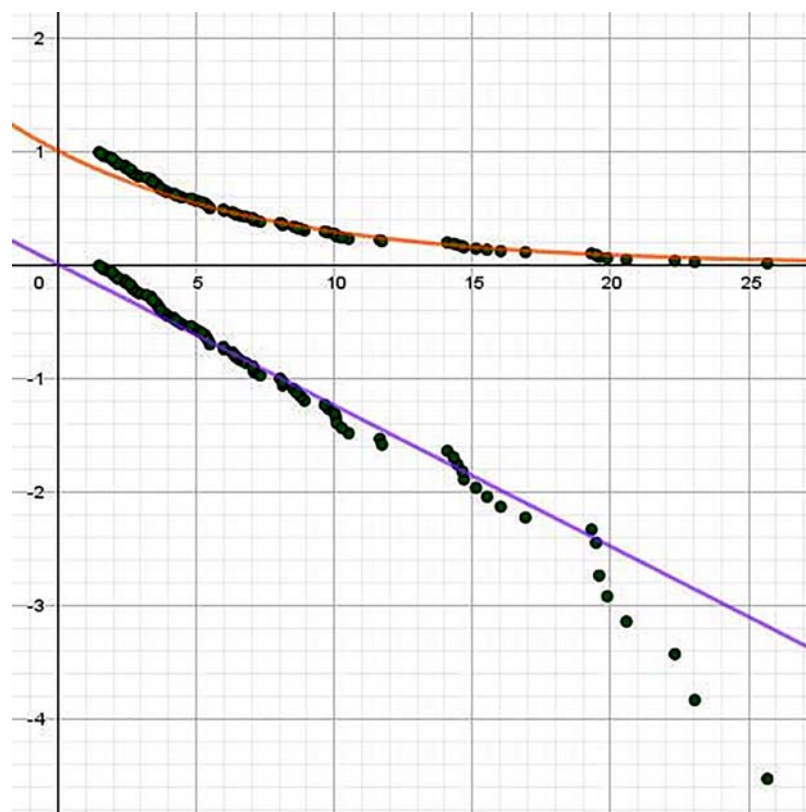


Abb. 2. Empirische und theoretische Verteilungsfunktion (oben); beides logarithmiert (unten)

Wartezeiten zuordnet. Je besser der Graph durch die „theoretische“ Verteilungsteilungsfunktion

$$F(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x}$$

beschrieben wird, desto besser ist das Exponentialmodell. Und wenn man H logarithmiert, sollte sich eine lineare Punktwolke ergeben, deren Steigung dann den Modellparameter λ schätzt. Abbildung 2 zeigt, dass das Exponentialmodell auch diese Prüfung gut besteht.

Im Stochastikunterricht wird man sich neben den „Ähs“ natürlich auch für den Inhalt von Lennarts Video interessieren. Dabei erfährt man, wie die Modellvalidierung mithilfe des KOLMOGOROFF-SMIRNOV-Tests verläuft – und das wäre dann tatsächlich die Landung des erwähnten didaktischen Doppeldeckers.

Wer seine Schüler/innen – jenseits der Äh's – (mit geschlossenen Augen) die Zwischenzeiten-Stoppuhr so präzise wie möglich im Sekundentakt klicken lässt, erhält zur großen Überraschung aller Beteiligten in wenigen Minuten wunderbar glockenförmig verteilte Zeitdifferenzen. Unsere Stoppuhr öffnet damit das Tor zur Normalverteilung. Und die geniale Idee der Linearisierung aus Abbildung 2 lässt sich über NQ-Plots auf die Normalverteilung übertragen (RIEMER & VEHLING, 2021). Stochastische Überraschungen garantiert!

4 Ein Rückblick

Wenn man – etwa im Rahmen einer Übungsstunde zum Integrieren – verrät, dass Exponentialfunktionen auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen definieren, die alltägliches „Warten auf irgendwas“ beschreiben, bereichert man die Analysis um eine überraschend neue Dimension, fast ohne Belastung des Zeitbudgets. Und der experimentelle Brückenschlag aus der „erlebten“ Realität sorgt für Nachhaltigkeit: An die Statistik der „Ähs“ wird man sich auch nach 20 Jahren beim Ehemaligentreffen noch erinnern – aber auch schon viel früher: Im mündlichen

Abi wartet die Prüfungskommission wahrscheinlich signifikant länger auf das nächste Prüflings-„Äh“!

Es war einmal ...

... damals, als es noch „richtige“ Kongresse gab. Damals konnten wir beide noch direkt Seit an Seit sitzen, um den Vorträgen zu lauschen. Und uns gelegentlich zuraunen: „Dieser Vortrag ist wirklich langweilig!“ In der Pause nach einem solchen Vortrag wurde der Kern für diese Unterrichtsidee geboren: eine Strichliste für jedes „Äh“ des Referenten! Inzwischen gibt es Videokonferenzen, online, digital. Ohne Anfassen. Doch die „Ähs“ sind geblieben. Verlässlich. Und verlässlich „Äh“-verteilt.

Literaturangaben

RIEMER, W. & VEHLING, R. (2022). Stochastik erkunden mit GeoGebra. mathematiklehren Sonderheft, 75–77.

SUTER, M. & STUCKARD-BAREE, B. (2021). Alle sind so ernst geworden. Zürich, Diogenes.

Prof. Dr. WILFRIED HERGET, Heinz-Berndt-Weg 1, 30974 Wennigsen, wilfried.herget@mathematik.uni-halle.de.

Dr. WOLFGANG RIEMER, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, w.riemer@arcor.de.

Das „Markenzeichen“ von WILFRIED HERGET (Universität Halle-Wittenberg) sind pfiffige „etwas andere“ Aufgaben. Ähnlich ist es bei WOLFGANG RIEMER (ZfSL Köln) mit der „etwas anderen“ Stochastik. Sie wurden 1994 bzw. 2004 mit dem Archimedes-Preis des MNU ausgezeichnet.

Ihr gemeinsamer Beitrag veranschaulicht, wie Mathematikunterricht ganz konkret aussieht, wenn man beide „Markenzeichen“ kombiniert. ■