Der DUBUFFETsche Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wahrscheinlichkeiten sind unsichere Festlegungen, die dadurch entstehen, dass aus Erfahrung Erwartung wird

WOLFGANG RIEMER – SEBASTIAN KUNTZE

In diesem Artikel wird mit einem nach dem Künstler JEAN DUBUFFET benannten Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Art Gegenentwurf zu gleichsam in Stein gemeißelten Axiomen der Didaktik der Stochastik präsentiert. Die DUBUFFETsche Sicht auf Wahrscheinlichkeit könnte stochastische Weltbilder verschieben, denn: die in der Mathematik vollzogene Kehrtwende weg von R. V. MISES, der vergeblich versuchte, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten zu „definieren" hin zu KOLMOGOROFFS „Wahrscheinlichkeit als Setzung" lässt sich unter Berücksichtigung lernpsychologischer Paradigmen überraschend einfach so umsetzen, dass seit Jahrzehnten ungelöste didaktische Probleme wie von selbst verschwinden.

1 Namensgebung

Am 05.03.2024 entdeckte DIETER BRANDT im Kunstmuseum Basel ein Gemälde, das sein Schöpfer, JEAN DUBUFFET (1901–1985) „unsichere Festlegungen" titelte. Damit war der lange gesuchte Name für einen Wahrscheinlichkeitsbegriff gefunden, der auf den Punkt bringt, was in Schüler/inne/n von der Grundschule bis zum Abitur – und auch danach – vorgeht, wenn es um Wahrscheinlichkeiten (umgangssprachlich um Chancen) geht: der DUBUFFETsche Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Im „DUBUFFETschen Sinn" sind Wahrscheinlichkeiten keine objektiv unabhängig vom Menschen existierende Größen mehr, sondern Festlegungen, die Zufallserscheinungen auf der Modellebene beschreiben. Die Festlegungen sind jedoch nicht notwendig final. Sie werden von der festlegenden Person als revidierbar angesehen und zwar in Abhängigkeit von weiteren Erfahrungen. Bei Wahrscheinlichkeiten handelt es sich somit um *unsichere Festlegungen*.

Klassische Statistiker/innen werden DUBUFFETS „Festlegungen" als Hypothesen über „die wahre" Wahrscheinlichkeit deuten. BAYESianer/innen werden in DUBUFFETS „unsicher" ihre a priori / a posteriori Bewertungen wiedererkennen, mit denen sie versuchen, Vertrauen in die Hypothesen zu quantifizieren. Schüler/innen sind aber weder klassische Statistiker/innen, noch sind sie BAYESianer/innen. Sie nehmen die Welt ganzheitlich wahr. Sie erleben – anknüpfend an Alltagserfahrungen – DUBUFFET-Wahrscheinlichkeiten als das Natürlichste der Welt!

Es scheint, als wäre die Sicht eines Künstlers bei der Lösung von Problemen hilfreich, die didaktisch interessierte Statistiker wie H. DINGES vor über 40 Jahren aufwarfen: *„Der objektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sich an Urne und Glücksrad orientiert, scheint gut geeignet, am Anfang des Stochastikunterrichts zu stehen. Er hat aber Grenzen. Die BAYESsche Formel passt nicht dazu; sie braucht den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die höhere Wahrscheinlichkeitstheorie braucht den Begriff der Hypothese… Viele Schulbücher scheinen entschlossen, die natürlichen Denkansätze über den Zufall bedenkenlos mit den aus der Strukturmathematik gewohnten Prinzipien des Mathematiklernens zu überrollen…"* (DINGES, 1978, 113 und 121).

Abb. 1. JEAN DUBUFFET (* 1901 in Le Havre; † 1985 in Paris) Déterminations incertaines – Unsichere Festlegungen (1965) (Kunstmuseum Basel: https://sammlungonline.kunstmuseum-basel.ch/eMP/eMuseumPlus)

Gedanken Zum Bildtitel „Déterminations incertaines" und zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

Bei DUBUFFETS Bildtitel „Déterminations incertaines" klingt auf Französisch die Bedeutung der deutschen „Ungewissheit" mit, was vielleicht nicht ganz kongruent zum „unsicher" in der deutschen Übersetzung ist. Auch die „détermination" wird gelegentlich in Kontexten verwendet, die mit einem gleichsam schicksalhaften in die Zukunft gerichteten Entschluss zu tun haben. Der dem Ausdruck innewohnende Gegensatz zwischen „détermination“ und „incertain“ ist damit durchaus spannungsgeladen und in seiner Kürze bedeutungsreich. Die „unsichere Festlegung“ ist also gleichzeitig in Form eines „ungewissen Bestimmungs-Entschlusses“ eine angesichts von Ungewissheit getroffene Modellannahme bzw. Modellierungsentscheidung.

Diese Festlegung ist im Falle der Wahrscheinlichkeit, bei der man sich für einen Wert p entscheidet, erfahrungsbasiert: Der Wert p entspricht einer auf die Zukunft gerichteten *Erwartung*. Sie lebt in der *Modellebene*. Der Entscheidung für p liegen früher gemachte *Erfahrungen* (auf der *Realitätsebene*) zugrunde, die möglicherweise auch in Form einer relativen Häufigkeit rechnerisch zusammengefasst wurden. Wie Dubuffet selber um den Titel gerungen hat, ist seinen Tagebuchaufzeichnungen zu entnehmen: „Champ de détermination“ und „Déterminations contradictoires“ wurden zugunsten des heute gültigen „Déterminations incertaines“ verworfen (Blank, 2020). Auch dies passt zum Wahrscheinlichkeitsbegriff: Bei Zufallsvorgängen einen festlegenden Entschluss zu treffen, fällt nicht leicht, denn der Zufall lässt sich durch die Festlegung ja nicht zurückdrängen, gleichzeitig kann ein Champ de détermination als „Feld der Festlegungen“ gut mit der mathematischen Modellebene assoziiert werden. Schließlich bleibt auch das Widersprüchliche der „Déterminations contradictoires“ erhalten, denn unterschiedliche Erfahrungen führen zu unterschiedlichen Festlegungen.
Aufgrund solcher möglicher Widersprüchlichkeiten bleiben auf der Modellebene festgelegte Wahrscheinlichkeiten *unsicher*.

Kurz und knackig:

Der Dubuffetsche Wahrscheinlichkeitsbegriff lässt sich wie folgt umschreiben:

- Wahrscheinlichkeiten sind *unsichere Festlegungen*.
- Sie entstehen dadurch, dass aus Erfahrung Erwartung wird.
- Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff unterscheidet Modellebene und Realitätsebene – messerscharf!
- Die Erfahrung schaut zurück in die Vergangenheit. Sie lebt auf der Realitätsebene.
- Die Erwartung schaut nach vorn in die Zukunft. Sie lebt auf der Modellebene.

Im Folgenden wird skizziert, wie sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff im Sinne Dubuffets von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe entwickelt. Fiktive Dialoge grenzen anschließend die Dubuffetsche Sicht auf Wahrscheinlichkeit von den die Didaktik dominierenden „klassischen“ Sichtweisen (Büchter & Henn, 2007, 182 oder Rolfes, Girandet & Fahse, 2018) so ab, dass der Mehrwert der Dubuffetschen Perspektive prägnant hervortritt.

2 Primarstufe

Grundschulkinder arbeiten zunächst – genau wie viele Erwachsene im Alltag – mit einem rein qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Sie lokalisieren „subjektive“ Wahrscheinlichkeiten auf Skalen zwischen *völlig unmöglich* und *ganz sicher* wie in Abbildung 2.

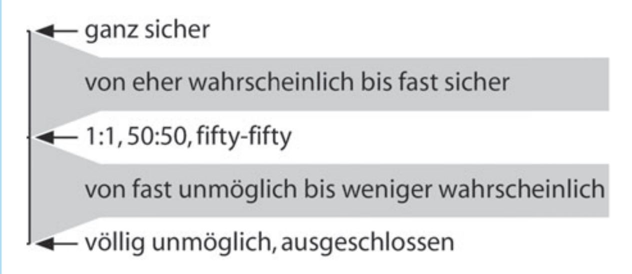


Abb. 2. Subjektive Wahrscheinlichkeitsskala in der Primarstufe (Krüger et al., 2015, 77)

Wenn die Schülerin Maike mehrmals mitbekommen hat, dass ihre Lehrerin am letzten Schultag vor den Ferien ein Eis spendiert hat, wird sie sich auf der qualitativen Skala nahe bei „ganz sicher“ (vielleicht bei 8 von 10) positionieren, wenn sie nach ihrer Einschätzung für den kommenden letzten Schultag befragt wird. Aus ihrer *Erfahrung* ist *Erwartung* geworden. Ihre Position 8 ist eine persönliche Festlegung. Und dass diese Festlegung unsicher ist, drücken Kinder mitunter dadurch aus, dass sie sich etwas breitbeiniger positionieren. Markieren ihre Füße dann nicht schon auf ganz präformalem Niveau das, was Statistiker/innen später ein Konfidenzintervall nennen?

Wie sehr uns diese subjektiven Wahrscheinlichkeiten auch nach der Grundschule durchs ganze Leben begleiten, machen die „Saturn-Wahrscheinlichkeiten“ aus Abbildung 3 deutlich.

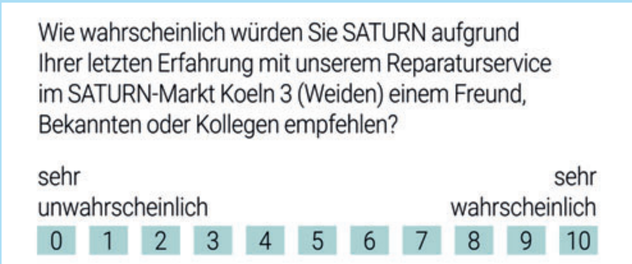
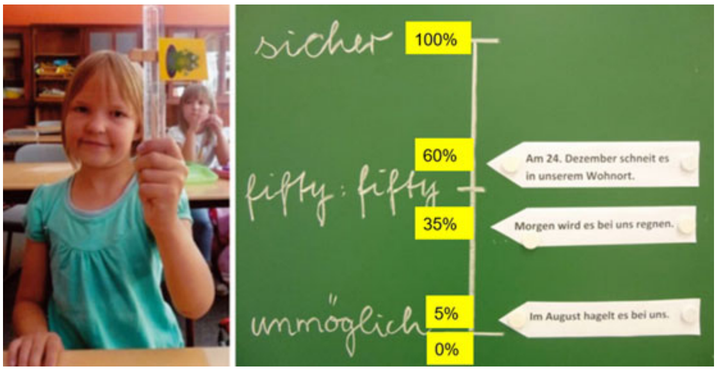


Abb. 3. Online-Feedback des Reparaturservice: Auch die „Saturn-Wahrscheinlichkeiten“ beruhen auf Erfahrungen. Die Befragten sollen darauf basierend eine Festlegung treffen.

3 Der Quantensprung in Klasse 7

Ab Klasse 7 verfügen Schüler/innen dann über den Prozentbegriff. *Das ändert alles!*
Als Lehrpersonen (!) beschriften wir die Enden der Wahrscheinlichkeitsskala bei „völlig unmöglich“ mit 0% und bei „ganz sicher“ mit 100%. Allein durch diesen Kunstgriff, dessen Genialität vielen Unterrichtenden gar nicht bewusst ist, wird die bisher nur qualitativ arbeitende Wahrscheinlichkeitsskala quantitativ, weil (im durch Proportionalitäten geprägten mathematischen Weltbild von Siebtklässler/inne/n) nun zu jeder Position ein Prozentsatz p gehört.



Prozentwert =
Grundwert · Prozentsatz

Erwartungswert =
Stichprobengröße · Wahrscheinlichkeit

Abb. 4. Wahrscheinlichkeitsskala nach KRÜGER, SILL & SIKORA (2015, 73)

Und Siebtklässler/innen wissen: Zu jedem Prozentsatz p gehört bei gegebenem Grundwert n (das ist jetzt die Versuchszahl) ein Prozentwert $n \cdot p$, der sich nun als Erwartungswert entpuppt. Kinder, die auf der Position 80 % stehen, erwarten bei 200 Versuchen also ±160 Treffer. Und wenn sie dann in mehreren Versuchswiederholungen immer deutlich weniger als 160 Treffer erhalten, werden sie ihre Position überdenken und in der Nähe von 60 % positionieren, wenn die Trefferzahlen statt um 180 um 120 streuten. Das ist wie bei MAIKE aus Klasse 3, die ihre Position – was das Eis am letzten Schultag betrifft – von 8 auf 6 verschiebt, wenn ihre Lehrerein wegen der vielen Kaugummis unter der Bank letzte Woche eine sehr ernste Ansage machte. Aus neuer Erfahrung ist neue Erwartung geworden. Aber natürlich handelt es sich bei der neuen Position 60 % dann auch nur um eine (möglicherweise etwas weniger unsichere) Festlegung im Sinne DUBUFFETs.

4 DUBUFFET-Wahrscheinlichkeiten in der Praxis – Die Brücke zwischen Primar- und Sekundarstufe

Statt sich – wie in der Grundschule – mit Füßen oder Wäscheklammern auf einer Skala zwischen unmöglich und sicher zu positionieren teilen Siebtklässler/innen wegen der durch den Prozentbegriff erweiterten Weltsicht ihre „unsicheren Festlegungen“ durch Prozentsätze zwischen 0 % und 100 % mit. Das ist der Grund dafür, dass der folgende Arbeitsauftrag (der erste Schritt des didaktischen Dreisatzes „Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren“) erfahrungsgemäß in *keiner* Klasse 7 Probleme bereitet. Er arbeitet komplett in der Modellebene und belegt eindrucksvoll, wie problemlos man (von vielen Lehrplankommissionen nie hinterfragten Paradigmen zum Trotz) auf einen Vorkurs „beschreibende Statistik“ verzichten kann, wenn man in das Thema Wahrscheinlichkeit einsteigen möchte.

4.1 Spekulieren

Arbeitsauftrag (ab Klasse 7):
„Schaut euch den Quader ($1{,}3 \cdot 2 \cdot 2{,}3\ cm^3$) genau an und schätzt nach Bauchgefühl die *Chancen in Prozent*, mit denen die Augenzahlen 1 bis 6 oben liegen werden, wenn man ihn in einem Becher würfelt. Stopp! Nicht würfeln! Erstmal nur schätzen! Die Antworten sehen zwischen Flensburg und Passau aus wie in der Klasse 7 aus Köln, deren Ergebnisse in Abbildung 5 zu finden sind.
Wegen *guter Erfahrungen* mit Symmetrien und *schlechter Erfahrungen* mit der Schwerkraft (hochkant stehende Pakete fallen schnell um) werden gegenüberliegenden Seitenpaaren gleiche Chancen eingeräumt, die umso größer sind, je stabiler die Lage, d. h. je größer die Standfläche ist.

Gute Erfahrungen mit Proportionalitäten führen ab Klasse 7 dazu, dass die Chancen oft auch proportional zu den Seitenflächen eingerichtet werden (was wegen des konstanten Volumens einer umgekehrten Proportionalität zur Standhöhe gleichkommt).

Würfeln mit Quadern: Schätzungen vor dem Experiment

	1	2	3	4	5	6	Summe	Vertrauen
Rene	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
Johanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
Fläche in cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
Fläche in %	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	10%

unsichere
Festlegungen

Abb. 5. Links: Festlegungen einer Klasse 7 (nach Bauchgefühl und Proportionalitätsmodell). Rechts: die Unsicherheit (Abstimmung über das Vertrauen in die sechs Modelle). In der Sekundarstufe II ist das Vertrauen in das Proportionalitätsmodell meist größer, weil man allem traut, was man berechnen kann (RIEMER, 2023, 21).

In allen Fällen handelt es sich um *unsichere Festlegungen*. ALEXAS Vorschlag (Abb. 5) stößt aber auf Kritik, weil sie nach Meinung der Klasse wegen der fehlenden Symmetrie nicht an Chancen (die auf der Modellebene leben) gedacht hat, sondern an (durchaus plausible) relative Häufigkeiten nach einem Versuch (die in der Erfahrungsebene leben). Aber auch JOHANNAS Festlegung muss nachgebessert werden. Sie hatte für 3 und 4 je 20 %, für 1 und 6 je 15 % veranschlagt – und zu spät bemerkt, dass dann für 2 und 5 mit je 15 % zu viel übrigbleibt.

Eine Abstimmung über die Glaubwürdigkeit der Modelle zeigt, dass in dieser Klasse 7 das mühsam berechnete Proportionalitätsmodell wenig Zustimmung findet: Die 12,8 % für die wackeligen Hochkant-Lagen schienen vielen Kindern zu hoch gegriffen. In der Sekundarstufe II sieht das oft anders aus, weil man mühsam berechneten Zahlen vertraut.

4.2 Experimentieren

Nach der Phase des Spekulierens wird das Experiment mit Spannung erwartet. Jeder „würfelt" 100-mal mit einem Becher, der auf den Tisch gestülpt wird, so dass die absoluten sofort auch als relative Häufigkeiten gelesen werden können. Die Ergebnisse werden wie in Abbildung 5 in Fünfergruppen samt revidierter Wahrscheinlichkeitsverteilungen in eine gemeinsame Tabelle eingetragen, gegebenenfalls auch langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert.

Würfeln mit Quadern: 0,2l Würfelbecher auf den Tisch gestülpt

Name	1	2	3	4	5	6	
Patrick	10	6	28	41	4	11	100
Daniel	6	7	35	45	4	3	100
Binoy	7	4	37	34	1	17	100
Tobias	3	6	48	33	6	4	100
Michael	12	0	28	42	7	11	100
absolute H.	38	23	176	195	22	46	500
relative Häufigkeit	7,6%	4,6%	35,2%	39,0%	4,4%	9,2%	100%
Modell Gruppe 1	8%	4,5%	37,5%	37,5%	4,5%	8,0%	100%
Paula	11	6	34	32	7	10	100
Elaine	14	10	28	24	9	15	100
Marie	4	6	41	32	11	6	100
Marga	10	6	34	29	7	14	100
Sandra	7	4	30	37	4	18	100
absolute H	46	32	167	154	38	63	500
relative Häufigkeit	9,2%	6,4%	33,4%	30,8%	7,6%	12,6%	100%
Modell Gruppe 2	10%	8%	32%	32%	8%	10%	100%
....							
alle zusammen	279	207	834	883	204	293	2700
relative Häufigkeit	10,3%	7,7%	30,9%	32,7%	7,6%	10,9%	100%
Modell A	11%	8%	31%	31%	8%	11%	100%
Modell B	10,5%	8%	31,5%	31,5%	8%	10,5%	100%
Proportionalitätsmodell: Kanten (cm)				2,3	2	1,3	
Fläche in cm²	2,99	2,60	4,60	4,60	2,60	2,99	20,38
Flächenanteil	14,7%	12,8%	22,6%	22,6%	12,8%	14,7%	100%

Abb. 6. Versuchsergebnisse (Auszug) und fünf Modelle, wobei die finalen Festlegungen A und B nahe beieinander liegen und hohes Vertrauen genießen (Die komplette Tabelle findet sich in RIEMER, 2023, 24)

4.3 Reflektieren

Das verlangsamende Mitschreiben hat den Vorteil, dass Zufallsschwankungen (wie die 48 Dreier bei TOBIAS) noch bewusster wahrgenommen werden. Die Schüler/innen erleben, dass sich die Zufallsschwankungen der relativen Häufigkeiten durch das Kumulieren in Gruppen verkleinern, aber nie verschwinden und dass *die Modelle aller Gruppen die Teilsymmetrien der Quader widerspiegeln*. Nach dem Zusammenfassen aller relativer Häufigkeiten einigt man sich im Plenum auf eine oder mehrere nahe beieinander liegende Wahrscheinlichkeitsverteilungen, in die man sehr viel mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem hohlen Bauch heraus aufgestellten", vergleiche hierzu die Modelle A und B in Abbildung 6. Sie können durch weitere Versuche ggf. noch ein bisschen verbessert werden, wobei sich die kleinen Verbesserungen dann aber als vergleichsweise irrelevant herausstellen. Das fasst man fürs Regelheft (Abb. 7) wie folgt zusammen:

(1) Bei Zufallsexperimenten kann man einzelne Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann ihnen aber Wahrscheinlichkeiten zuordnen, die zusammen 100% ergeben.
(2) Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt („festgelegt"), wenn
- man Symmetrien beachtet,
- die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeit liegen,
- die relativen Häufigkeiten bei Versuchswiederholungen zufällig um die Wahrscheinlichkeiten pendeln, mal etwas darüber liegen, mal etwas darunter.
- Die Wahrscheinlichkeiten drücken aus, wo man zukünftig in etwa die relativen Häufigkeiten erwartet.

(3) Je mehr Erfahrungen zugrunde liegen, desto größer das Vertrauen in die festgelegten Wahrscheinlichkeiten.

Realitätsebene	**Modellebene**
$h_1 + \cdots + h_n = 100\%$	$p_1 + \cdots + p_n = 1$
relative Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten
leben im Becher	leben im Kopf
schauen zurück	schauen nach vorne
schwanken zufällig	werden festgelegt, bezweifelt, verbessert
Im Fall von Teilsymmetrien	
ungefähr gleich	genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \cdots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_n \cdot p_n$
Standardabweichung (empirisch) $s = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 h_i}$	Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 p_i}$

Abb. 7. Regelhefteintrag nach Lambacher-Schweizer 7 (2007), mit präziser Abgrenzung der Realitäts- von der Modellebene. Die Schüler/innen haben in diesem Unterrichtsverlauf erlebt, dass Wahrscheinlichkeiten im DUBUFFETschen Sinn als unsichere Modelle festgelegt werden.

5 Jetzt wird's philosophisch – drei Dialoge

5.1 Dialog zwischen Schulbuchautoren

THOMAS (Schulbuchautor): Eure Formulierung: ‚Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt…' klingt eingängig, ist fachlich aber falsch. Wahrscheinlichkeiten kann man nicht wählen, die sind da! Da bin ich bei den anderen Schulbüchern und bei der Didaktik (Abb. 8). Die DUBUFFET-Wahrscheinlichkeiten sind bestenfalls Hypothesen über die richtige Wahrscheinlichkeit, aber um

Hypothesen geht es erst in der beurteilenden Statistik, wo man sie testet, nicht in Klasse 7.

(1) Wir gehen aus von der Existenz einer dem Zufallsexperiment innewohnenden objektiven Wahrscheinlichkeit, die wir durch verschiedene Ansätze näherungsweise zu bestimmen versuchen.
(2) Der Laplace-Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz a priori, d. h. vor Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments, rein aus der Vernunft gewonnen.
(3) Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein empirischer Ansatz a posteriori, d. h. nach Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments gewonnen.
(4) Der subjektive Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz, in dem häufig eigene Erfahrungen und Wünsche verankert sind.

Abb. 8. Die „Axiome" der Didaktik nach BÜCHTER & HENN (2007, 182): Modell- und Wirklichkeitsebene werden nicht getrennt, Erwartungen spielen keine Rolle und von Erfahrungen ist nur in (4) die Rede.

WOLFGANG/SEBASTIAN:
Wir sehen das anders: Die Didaktik hat die „Kopernikanische" Wende weg von R. V. MISES hin zu KOLMOGOROFF verschlafen. KOLMOGOROFFS geniale Idee war, Wahrscheinlichkeiten im DUBUFFETschen Sinn als unsichere Festlegungen zu begreifen und auf das Unmögliche zu verzichten, nämlich „die" Wahrscheinlichkeit (als Grenzwert von Folgen relativer Häufigkeiten) genau bestimmen zu wollen. Statt diese zentrale Idee aufzugreifen hat sich die Didaktik in den Zeiten der Mengenlehre („New-Math") auf Ereignisalgebra konzentriert, weil Ereignisse Mengen sind, die man miteinander verknüpfen kann. KOLMOGOROFFS eigentliche Idee wurde dabei didaktisch gegen die Wand gefahren. Wir haben ein Gespräch zwischen CHRISTIANE, die sich als Examenskandidatin exakt an die fachdidaktischen Axiome hält, und DUBUFFET mitgeschnitten:

5.2 Gespräch über die Axiome

(1) CHRISTIANE:
Wir gehen aus von der Existenz einer dem Zufallsexperiment innewohnenden objektiven Wahrscheinlichkeit, die wir durch verschiedene Ansätze näherungsweise zu bestimmen versuchen.

DUBUFFET:
„Wir" meint sicher nicht die Kinder. Ist es für Siebtklässler/innen nicht höchst frustrierend, wenn selbst hochkarätige Fachdidaktiker/innen nur *versuchen* können, Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen … – und das auch *nur näherungsweise*?

(2) CHRISTIANE:
Der LAPLACE-Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz a priori, d. h. vor Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments, rein aus der Vernunft gewonnen.

DUBUFFET:
Hinter „rein aus der Vernunft gewonnen" stecken doch auch nur Erwartungen, die aus guten Erfahrungen mit Symmetrie oder Proportionalität resultieren.

(3) CHRISTIANE:
Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein empirischer Ansatz a posteriori, d. h. nach Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments gewonnen

DUBUFFET:
Hinter „frequentistisch" stecken die Erfahrungen aus den systematischen Zufallsexperimenten. In dem Moment, in dem man frequentistische Wahrscheinlichkeiten hinschreibt, handelt es sich auch nur noch um „unsichere" Festlegungen. Und überhaupt: ab wann würdest du die hingeschriebenen Wahrscheinlichkeiten als frequentistisch bezeichnen? Schon nach 5 Versuchen? Nach 10 … oder vielleicht erst ab 200 Versuchen?

Und schau mal, wie sich die armen Schulbuchautor/inn/en winden, wenn Sie in Merkkästen festhalten müssen, was sich Schüler/innen unter frequentistischen Wahrscheinlichkeiten vorstellen sollen (Abb. 9a, 9b). Da fallen Modellebene (Wahrscheinlichkeit) und Realitätsebene (relative Häufigkeit) zusammen.

Wenn ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt wird, dann stabilisiert sich die relative Häufigkeit der Ergebnisse ***um*** einen festen Wert P(A).
Dieser Wert heißt Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses A.

Abb. 9a. Fundamente der Mathematik 7 (G9) NRW (2019,189)

Wird ein Zufallsexperiment sehr viele Male wiederholt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. ***Diese relativen Häufigkeiten sind dann die Wahrscheinlichkeiten.***

Abb. 9b. http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/index.htm („teste dein Wissen")

CHRISTIANE:
Der subjektive Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz, in dem eigene Erfahrungen und Wünsche verankert sind.

DUBUFFET:
Was unterscheidet „eigene Erfahrungen" von denen, die man beim Durchführen von Zufallsexperimenten in (3) sammelt oder von Symmetrieerfahrungen (2) bei LAPLACE?
Aber sei mal ehrlich: Wünsche haben hier nichts zu suchen!

5.3 Blick ins Klassenzimmer „Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab"

Der Dialog in Abbildung 10 (Auszug aus VOIGT, 1983, 24f) fand in einer 8. Klasse eines Gymnasiums in der 2. Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung statt. Vorausgegangen war eine Stunde zu LAPLACE-Wahrscheinlichkeiten. An der Tafel stehen kumulierte relative Häufigkeiten für das Ereignis „Rückenlage“ beim Werfen einer Reißzwecke.

01 Lehrer:	„54%, 60%, 54%, 51%, 55%, 60% ... Sind das Wahrscheinlichkeiten?“
02 Schüler:	„weiß nicht“.
03 Lehrer:	„Was sind denn das für Dinger?“
04 Schüler:	„Wahrscheinlichkeiten.“
[Einige Minuten später...]	
05 Marco:	**„Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab.“**
06 Lehrer:	**„Die Wahrscheinlichkeit hängt nicht so sehr vom Zufall ab. Die Versuchsausgänge hängen vom Zufall ab.“**
07 Lehrer:	„Was hat jetzt die relative Häufigkeit mit Wahrscheinlichkeit zu tun?“
08 Schüler:	[Erklärt, wie man die relative Häufigkeit ausrechnet.]
09 Lehrer:	„ja, aber ist jetzt Wahrscheinlichkeit dasselbe wie relative Häufigkeit?“
10 Stefan:	„Ich würde sagen ja. Von der Herkunft würde ich sagen ja. Nur relative Häufigkeit ist im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit ungenauer.“
12 Lehrer:	[deutet auf eine relative Häufigkeit]: „Bist du denn sicher, dass das die richtige Wahrscheinlichkeit ist?“
13 Stefan:	„Nein. Die kann man gar nicht feststellen.“
14 Lehrer:	„Die kann man gar nicht feststellen. So etwas gibt es, aber feststellen können wir sie nicht. Was können wir machen für die Wahrscheinlichkeit?“
15 Stefan:	**„überhaupt nichts.“**

Abb. 10. Fragend-entwickelnder Dialog

MARCOS Bemerkung in Zeile 05 „Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab“ könnte von DUBUFFET stammen – und hat philosophische Tiefe: Das Modell, das wir uns vom Verhalten der Zwecke machen, hängt tatsächlich – genau wie später das Konfidenzintervall – vom Zufall ab, von dem nämlich, was wir zuvor erlebt haben: ganz nach dem Motto: *Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird.*

Das passt aber nicht zum Weltbild des Lehrers, der in Zeile 06, den Axiomen aus Abbildung 8 entsprechend Wahrscheinlichkeit als eine objektiv existierende Größe begreift, nicht als vom Menschen gesetztes Modell der Wirklichkeit. Deswegen wünscht er sich als Antwort auf seine Frage in Zeile 14 (vergeblich) die Antwort: „Man kann die Wahrscheinlichkeit nur schätzen“.

Wenn man versucht, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten zu „definieren“, verflucht man insgeheim den Zufall und damit den Kern der Stochastik. Man landet schnell bei LORD VOLDEMORT, den J.K. ROWLING in Ihren HARRY POTTER-Bänden definiert als *„Der, dessen Name nicht genannt werden darf“* oder als *„Du weißt schon wer“*: Ist nicht die frequentistische Wahrscheinlichkeit der LORD VOLDEMORD der Stochastik, *„die, deren Wert nicht bestimmt werden kann“* oder *„Du weißt schon welche“*?

6 Gelöste Probleme

In seinem Vortrag (10.12.2022) auf dem AK Stochastik der GDM merkte TOBIAS ROLFES an:

- Die Bildungsstandards der Primarstufe und der Sekundarstufe sind bzgl. des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wenig abgestimmt.
- In der Sekundarstufe I werden der LAPLACEsche und der frequentistische Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff isoliert voneinander unterrichtet.
- Es stellt sich die Frage, wie die unterschiedlichen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff integrativ so unterrichtet werden können, dass intuitive Schülervorstellungen gewinnbringend in den Stochastikunterricht einfließen (vgl. hierzu auch ROLFES et al., 2018)
- Und nochmals HERMANN DINGES (1980): *„Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff scheint geeignet, am Anfang des Unterrichts zu stehen. Er hat aber seine Grenzen: die höhere Wahrscheinlichkeitsrechnung braucht den Begriff der Hypothese.“*

Löst nicht die DUBUFFETsche Sicht auf Wahrscheinlichkeit alle vier Probleme gleichzeitig?

- Ist nicht die Beobachtung, dass die qualitativ zwischen unmöglich und sicher arbeitende Wahrscheinlichkeitsskala der Grundschule, die – *ohne (!)* einen Vorkurs „beschreibende Statistik“ – nur durch die Beschriftung der Enden mit 0% und 100% quantitativ wird, der in der Didaktik bisher noch nicht entdeckte *„missing Link“* zwischen Primar- und Sekundarstufe?
- Ist nicht die Idee, dass alle Wahrscheinlichkeiten als prognostische Modelle im Kopf als unsichere Festlegungen aus Erfahrungen entstehen, die verbindende Brücke zwischen den LAPLACE‘schen und den frequentistischen Wahrscheinlichkeiten?
  Eindringlich kann man das erleben, wenn man – anstelle von Spielwürfeln – beschriftete Sechskantstifte über den Tisch rollen lässt. Dabei fällt das wegen der Sechskant-Symmetrie höchst vertrauenswürdige LAPLACE-Modell wie

Abb. 11. US-Penny, vgl. RIEMER & MEHL (2024) und https://www.youtube.com/watch?v=icxu3e_z2uI

Kartenhaus in sich zusammen und die LAPLACE-Wahrscheinlichkeiten werden durch hinzukommende Erfahrungen modifiziert (und erfahrungsbasiert durch neue Festlegungen ersetzt). Gleiches gilt, wenn man Münzen nicht wirft, sondern aufrechtstehend um die eigene Achse kreiseln lässt. Bei US-Pennys liegt wegen des „ausgeprägten“ also schweren Profils ABRAHAM LINCOLN (Abb. 11 links) sehr häufig (in bis zu 80% aller Fälle) unten, sein Denkmal mit der Aufschrift „One Cent“ (Abb. 11 rechts) also oben.

- Aber auch wer den Axiomen der Didaktik folgend an unabhängig von uns Menschen existierende Wahrscheinlichkeiten glaubt, kann hervorragend mit DUBUFFET leben, wenn man DUBUFFETs Wahrscheinlichkeiten als Hypothesen über „die wahren“ Wahrscheinlichkeiten auffasst.
  Deswegen trugen die beim „Quadern“ aktivierten Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bisher den Beinamen „hypothetisch-prognostisch“, um sie von den LAPLACE’schen und den frequentistischen Wahrscheinlichkeiten abzugrenzen.

7 Resümee und Ausblick

- Beim DUBUFFETschen Wahrscheinlichkeitsbegriff handelt es sich um eine absolut unterrichtstaugliche und handlungsorientierte Interpretation des KOLMOGOROFFschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, bei der subjektivistische, LAPLACEsche und frequentistische Sichtweisen auf Wahrscheinlichkeiten zu einer Einheit zusammenwachsen.
- Für die Begriffsbildung problematisch wird es, wenn man das empirische Gesetz der großen Zahlen im Sinne des starken Gesetzes der großen Zahlen deutet und gemäß v. MISES versucht, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeit zu definieren. Man landet bei LORD VOLDEMORT und Realitäts- und Modellebene verschwimmen miteinander.
- Unproblematisch ist dagegen die $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Deutung des Gesetzes der großen Zahlen:

  a) Die Zufallsschwankungen der relativen Häufigkeit h um ein *bekanntes* p halbieren sich, wenn man den Versuchsumfang n vervierfacht. Das kann man schon in Klasse 7 entdecken, wenn man Zufallsschwankungen nicht durch die Standardabweichung misst, sondern durch die Länge der Boxen in Boxplots.

  b) Ab Klasse 10/11 präzisiert man: die relative Häufigkeit h liegt „fast immer“ im Prognoseintervall
  $\left[p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$,
  dessen Vereinfachung
  $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}};\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ für $p=\frac{1}{2}$
  für die Namensgebung $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz (RIEMER, 1991) verantwortlich war.

  c) Daraus folgt das eingängige Konzept des Bezweifelns: (Nur,) wenn man sich *bei einer Wahrscheinlichkeitsangabe p unsicher* ist und eine relative Häufigkeit h außerhalb des Prognoseintervalls von p beobachtet, bezweifelt man, dass p ein gutes Modell ist.
  Es handelt sich hierbei um eine präformale Fassung des zweiseitigen Signifikanztests auf dem 4,6 %-Niveau.
- Das Konzept des Konfidenzintervalls, in dem man zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h alle die Wahrscheinlichkeiten sammelt, die man nicht bezweifeln muss, passt ausgezeichnet zum DUBUFFETschen Wahrscheinlichkeitsbegriff, denn Konfidenzintervalle sind – genau wie DUBUFFETs Wahrscheinlichkeiten – abhängig von der Erfahrung (der relativen Häufigkeit h) und sie sammeln die Festlegungen, bei denen man sich „ein bisschen weniger“ unsicher ist. Das entspricht dem breitbeinigen Positionieren auf der Wahrscheinlichkeits-Grundschulskala oder den nahe beieinanderliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen A und B nach den 2700 Quaderwürfen in Abbildung 6.
- Und *wenn* man sich in Übereinstimmung mit den Siebtklässlern aus Abbildung 5 entschließt, auch DUBUFFETs Unsicherheit (vgl. die letzte Spalte in Abbildung 5) auf einer Skala zwischen 0% und 100% zu quantifizieren, landet man im BAYESschen Universum. Man erkennt, dass auch die – von klassischen Statistikern abgelehnte – BAYESianische Sicht auf die Welt, in der das Vertrauen in die Brauchbarkeit von Modellen durch Wahrscheinlichkeiten bewertet wird, ausgezeichnet unter DUBUFFETs Hut passt. Die unterschiedlichen Sichtweisen der Objektivisten und der Subjektivisten beleuchten BÜCHTER & HENN (2007, 377f) und auch BARTH & HALLER (1985, 70f).

8 Nachwort: JEAN DUBUFFET als Namensgeber unseres Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Im Jahr 1964, also ein Jahr vor den „unsicheren Festlegungen“ schuf JEAN DUBUFFET „Algebra of Uncertainty“ (L’ Algèbre des Incertitudes, Link zum Bild: https://www.moma.org/collection/works/38576). Man könnte das Bild so sehen: Die Schnitt-, Vereinigungs- und Komplementärereignisse sind dort künstlerisch durchkomponiert, gut zu erkennen. Ob sich DUBUFFET für Ereignisalgebra interessierte, bevor er mit den „Unsicheren Festlegungen“ sozusagen in die „Wahrscheinlichkeitstheorie“ hinüberschwenkte?
Dokumentiert ist dazu nichts. Vermutlich hat sich DUBUFFET nie mit Mathematik beschäftigt. Sehr gut dokumentiert ist dagegen, wie seine frühen Gemälde – vom Bildvokabular der Kinder und Naiven inspiriert – die „Art brut“ begründeten. Und wegen dieses naiven Blicks durch die Augen Lernender, sich die Umwelt erschließender Kinder, die auf das Eis am letzten Schultag hoffen – haben wir ihn zum Namenspatron unseres Wahrscheinlichkeitsbegriffs gemacht.
Ob es DUBUFFET bei den „Déterminations incertaines“ vielleicht sogar um das Wahrnehmen an sich ging? Beim Wahrnehmen werden ja auch auf Vorwissen (Vorerfahrungen, bereits konstruiertes Wissen) aufbauende Festlegungen getroffen – wobei man sich der Unsicherheit bewusst sein sollte, denn man könnte sich ja beim Wahrnehmen getäuscht haben. Das führt auch zu einer gewissen Vorläufigkeit von Wahrnehmungen, auf der Basis

von mehr oder anderem Vorwissen könnte etwas anderes wahrgenommen werden. Möglich wäre es, sich einen im Nebel Herum-Tappenden vorzustellen, der versucht, Sinn aus dem zu machen, was ihn umgibt. Vielleicht geht es Kindern ähnlich, wenn sie auf Zufallskontexte treffen, vielleicht geht es den reflektierenden Fachdidaktiker/inne/n sogar ein klein wenig ähnlich. Insofern ist das Formulieren einer Wahrscheinlichkeit tatsächlich so etwas wie das In-Worte-Fassen einer Wahrnehmung (und mit so einer verbalisierten Wahrnehmung sind wir bereits auf der Modellebene). DUBUFFET unterscheidet auf diese Weise möglicherweise die Welt der Wahrnehmungen („Modelle", die sich ein Mensch von etwas macht) und die – vermutlich als unzugänglich betrachtete – „Realität". Schön ist an den Déterminations incertaines, wie Unordnung und beginnende Ordnung ineinandergreifen, wie die Wahrnehmung und grafische Verarbeitung/Strukturierung immer noch keinen sicheren Halt gibt... Nur eins ins sicher: ANDREI NIKOLAJEWITSCH KOLMOGOROFF hätte sich wegen der *„Festlegungen"* über die „schulische Rehabilitation" seines axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs jenseits aller mengentheoretischen Formalismen sicherlich sehr gefreut! Ebenso THOMAS BAYES, darüber, dass DUBUFFET die mit den Festlegungen verbundenen *„Unsicherheiten"* nicht hat unter den Tisch fallen lassen. Ob Kunst und Mathematik letztendlich doch viel näher beieinander sind als wir Mathematiker/innen auf den ersten Blick vermuten?

Danksagung

Wir danken Prof. Dr. TOBIAS ROLFES für den Input auf der Tagung des AK Stochastik der GDM (2022), Dr. CHRISTIAN FAHSE für den intensiven Gedankenaustausch und natürlich Dr. DIETER BRANDT, der mit dem Schnappschuss von DUBUFFETS „unsicheren Festlegungen" und den Recherchen im Baseler Kunstmuseum dem „hypothetisch-prognostischen" Wahrscheinlichkeitsbegriff zu dem lange vergeblich gesuchten markanten Namen verhalf.

Literatur

BARTH, F. & HALLER, R. (1985). *Stochastik*. Ehrenwirth.

BLANK, C. (2020). JEAN DUBUFFET, *Déterminations incertaines*. In Kunstmuseum Basel (Hg.), *Sieben Bilder für Basel* (S. 12–19). Christoph Merian Verlag. https://issuu.com/christoph-merian-verlag/docs/leseproble_20200819_sieben-bilder_jr_

BÜCHTER, A. & HENN, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik* (2. Aufl.). Springer.

DINGES, H. (1980). Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Schule. In *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt*, Bd. 3 (S. 49–61). Hölder-Pichler-Temsky.

KRÜGER, K., SILL, H.-D. & SIKORA, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer.

GREULICH, D., JÖRGENS, T. & RIEMER, W. (2007). *Lambacher-Schweizer 7 (NRW)*. Klett.

MALLE, G. & MALLE, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *mathematiklehren, 118*, 52–56.

PALLACK, A. (Hg.). (2014). *Fundamente der Mathematik 8 (G8), NRW*. Cornelsen.

RIEMER, W. (1991). Das ‚Eins durch Wurzel aus n'- Gesetz. Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I. *Stochastik in der Schule, 11*(3), 24–36.

RIEMER, W. (2023). *Statistik unterrichten - eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik*. Kallmeyer.

RIEMER, W. & MEHL, J. (2024). Der kreiselnde Penny. *mathematiklehren, 243*, 27–30.

ROLFES, T., GIRNAT, B. & FAHSE, C. (2018). *Schülerkompetenzen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Sekundarstufe*. https://www.researchgate.net/publication/322071924.

VOIGT, J. (1983). *Transskripte zum Projekt „Routinen im Mathematikunterricht"*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Materialien und Studien 33.

Dr. WOLFGANG RIEMER, JG-Universität Mainz, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, w.riemer@arcor.de, ist Träger des Archimedes-Preises.

Prof. Dr. SEBASTIAN KUNTZE, sebastian.kuntze@ph-ludwigsburg.de, ist Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.