Über den Daumen gepeilt

Beim Datensammeln den Strahlensatz entdecken

Wolfgang Riemer

Wenn man etwas „über den Daumen peilt" oder eine Größe „Pi mal Daumen" angibt, dann steht das sprichwörtlich für „ungenau". Aber wie ungenau ist die Abstandsbestimmung durch Anpeilen eines Objektes bekannter Größe über den Daumen? Gute Frage! Sie lässt sich durch Sammeln von Daten beantworten. Gleichzeitig werden beim Entdecken des Strahlensatzes Brücken gebaut zwischen Algebra, Geometrie, beschreibender und beurteilender Statistik. Und tendenziell trockene Rechenaufgaben gewinnen durch Daumenpeilen und Datensammeln eine ungewohnte Erlebnisqualität.

1 Startexperiment (von Klasse 5–13)

- An der Wand hängt ein (rotes) DIN A3 Blatt quer. Auf dem Boden wurde orthogonal zur Wand ein 20 Meter langes Bandmaß fixiert.
- Jeder peilt mit ausgestreckter Hand über den nach oben zeigenden Daumen 👍 das Blatt an und schreitet längs des Bandmaßes so lange vor bzw. zurück, bis der Daumen das Blatt von links nach rechts abdeckt.
  Ganz genau, nicht nur ungefähr!
- Am Bandmaß wird abgelesen und auf einem Zettel wird festgehalten, in welchem Abstand L vom Blatt man dann steht.
- In einer zweiten Messung wird die kürzere Seite des Blattes (nun natürlich über den horizontal 👈 ausgerichtetem Daumen) abgedeckt. Der Abstand K wird ebenfalls notiert.

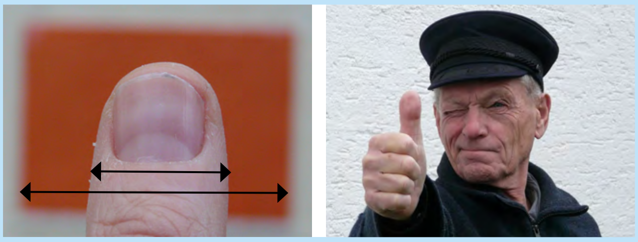

Abb. 1. Der Daumen (kurzer Pfeil) muss das Blatt (beim Segeln entspricht das Blatt dem Leuchtturm am Hafen, langer Pfeil) genau abdecken.

2 Spekulieren (Hypothesen aufstellen)

VOR Befragung der Daten wird über folgende Fragen spekuliert:
- Warum bleiben nicht alle gleichweit vom Blatt entfernt stehen, obwohl doch alle das gleiche Blatt anpeilen? (Abb. 2.)
- Um wieviel weiter bleibt man stehen, wenn man statt der kurzen die lange Seite des Blattes anpeilt?
- Wie lässt sich „mit Mathe" – je nach Vorkenntnissen heißt das: mit Proportionalität (Klasse 7), Geradengleichungen (Klasse 8) oder Strahlensatz (Klasse 9/10) – herausfinden, wo genau man „theoretisch", also im mathematischen Modell stehen bleiben müsste?
- Wie gut passen Mathe (Modell) und Wirklichkeit zusammen? Das wäre dann die Frage nach der Genauigkeit der Abstandsbestimmung durch Daumenpeilen.

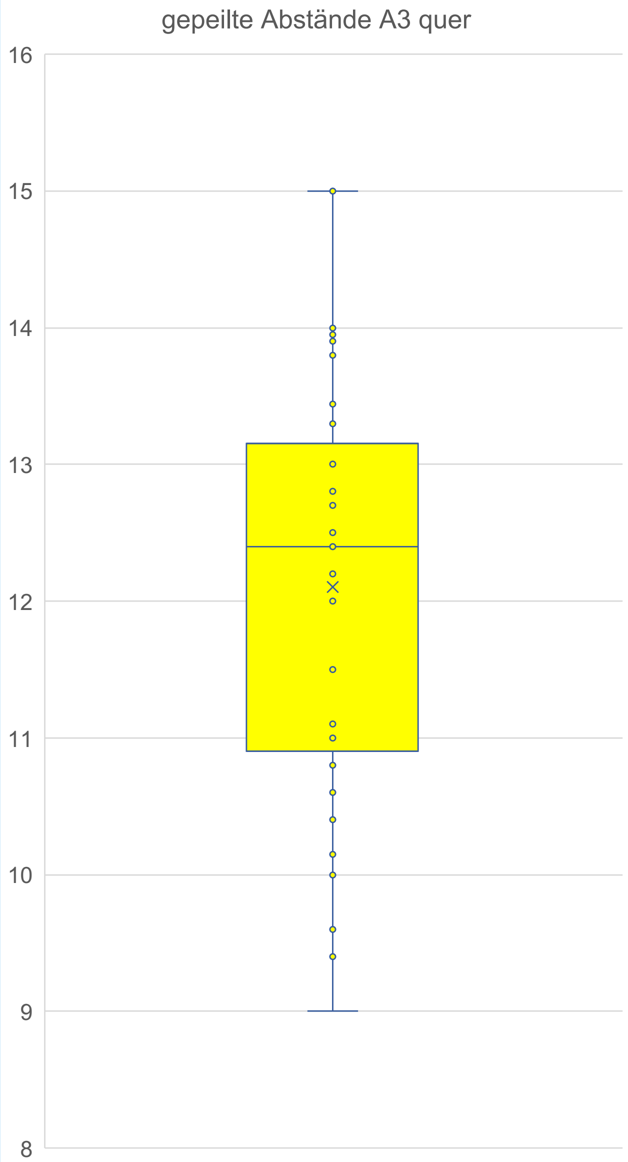

Abb. 2. 39 gemessene Abstände in Meter (DIN A3 quer)

3 Kurze gegen lange Seite

Hier spielen Daumenbreite und Armlänge noch keine Rolle. Bei DIN-Formaten ist die längere Seite um den Faktor $\sqrt{2}$ länger als die kürzere. Ob auch für die gemessenen Peilabstände $L = \sqrt{2} \cdot K$ gilt?

Gute Hypothese! Die muss man prüfen!

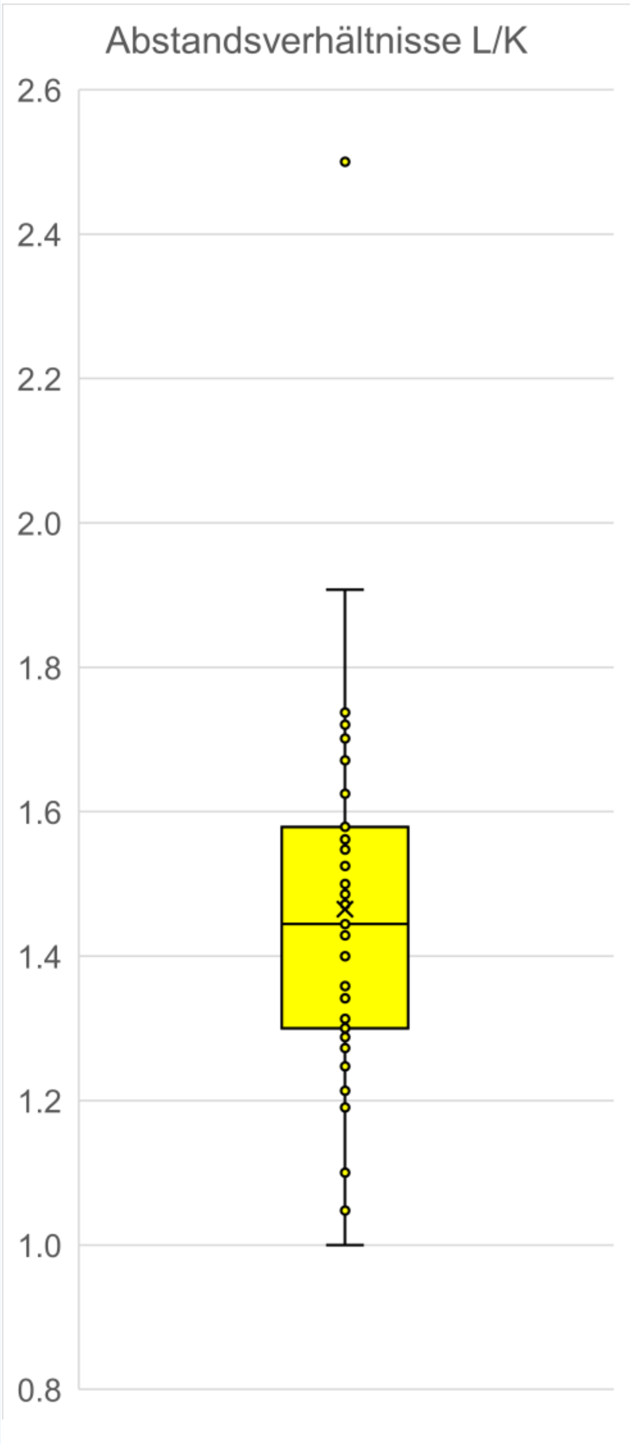

Abb. 3. Verteilung von 39 gemessenen Abstandsverhältnissen L/K mit Mittelwert 1,465 und Median 1,444.

(Wenn man das Experiment in Klasse 6 durchführt, verwendet man statt $\sqrt{2}$ das Seitenverhältnis 1,4, das man durch Ausmessen bestimmt.)

Beschreibende Statistik

Mit beschreibender Statistik lässt sich die Hypothese dadurch prüfen, dass jede/r das Verhältnis der gemessen Peilabstände in eine gemeinsame Tabelle einträgt. Abbildung 3 zeigt, was dabei herauskommt: Sowohl der Mittelwert (1,465) als auch der Median (1,444) liegen tatsächlich nahe bei $\sqrt{2}$. Aber der Ausreißer 2,5 belegt, dass sich hier tatsächlich jemand gehörig „verpeilt“ hat.
Sowas passiert! Aber natürlich bekommt jede/r eine zweite Chance, die eifrig (!) wahrgenommen wurde. Ist das nicht eine im wahrsten Wortsinn „merkwürdige“, weil überaus motivierende „Intervallschachtelung“ zu $\sqrt{2}$?

Beurteilende Statistik

Wer das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz kennt, nutzt den Vorzeichentest wie folgt: $\sqrt{2}$ hat so viele Nachkommastellen, dass es keinen Zettel gibt, bei dem die Gleichung $\frac{L}{K} = \sqrt{2}$ exakt stimmt. Entweder gilt $\frac{L}{K} > \sqrt{2}$ (Quotient zu groß: „+“) oder $\frac{L}{K} < \sqrt{2}$ (Quotient zu klein: „–“). Wenn die Hypothese stimmt, sollte die Wahrscheinlichkeit zu großer Quotienten den Wert 0,5 haben, es sollte also gelten $p(+) = 0{,}5$. Nach dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ – Gesetz müsste dann die relative Häufigkeit $h(+)$ mit ca. 95%iger Sicherheit im Intervall $\left[0{,}5-\frac{1}{\sqrt{n}};\ 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, bei $n=39$ Versuchsteilnehmern also in $\left[0{,}5-\frac{1}{\sqrt{39}};\ 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{39}}\right] = [0{,}339; 0{,}660]$ liegen. Und tatsächlich: Die beobachte relative Häufigkeit $h(+) = \frac{18}{39} = 0{,}461$ liefert keinen Anlass an der Hypothese $p(+) = 0{,}5$ zu zweifeln.

4 Eine „hinterlistige“ Variante

Eine hinterlistige Variante dieses Experimentes ergibt sich im Rahmen einer wirklich handlungsorientierten Abiturvorbereitung (vgl. Riemer, 2023), wenn man als Versuchsleiter/in (heimlich, weil das nach Augenmaß niemandem auffällt) die kürzere Seite des DIN A3 Blattes um 2 cm verkürzt und zusammen mit der Lerngruppe durch Datenanalyse prüft, ob sich die heimliche Verkürzung (nun gilt $\frac{L}{K} = \frac{L}{\frac{L}{\sqrt{2}}-2} \approx 1{,}51 > \sqrt{2}$) mithilfe der Messdaten als statistisch signifikant nachweisen lässt, ob also der Vorzeichentest Zweifel an der Hypothese $p(\frac{L}{K} = \sqrt{2}) = 0{,}5$ signalisiert.

5 Strahlensatz

Neben den Messungenauigkeiten sind natürlich auch anatomische Unterschiede wie Daumenbreite und Armlänge für die beachtliche Streuung der gemessenen Abstände verantwortlich. Dass erleben Siebtklässler/innen, indem sie ihren eigenen Peilabstand beim Experimentieren dadurch halbieren,

Abb. 4. Partnerarbeit bei Bestimmung des persönlichen Peilquotienten
q = *Armlänge/Daumenbreite*

lich eine Art „persönlicher Bindung“ an die Strahlensatzmathematik. Man sollte sich also bewusst sein, auf was man verzichtet, wenn man sich nach dem Motto Strahlensatz virtuell (Lutz, 2022) vorwiegend auf der digitalen Ebene bewegt.

6 Wie genau ist „über den Daumen gepeilt“?

Um einen Eindruck von der Genauigkeit zu bekommen, mit der man Abstände über das Daumenpeilen nach der Formel (*) bestimmen kann, werden

- dass sie die Armlänge durch Anwinkeln halbieren oder
- dass sie ihre Daumenbreite verdoppeln, indem sie beim Peilen beide Daumen nebeneinanderlegen.

Der Peilabstand ist somit nicht nur zur Objektbreite proportional, sondern auch zur Armlänge und umgekehrt proportional zur Daumenbreite. Und das schlägt sich in der Formel

$$\text{Abstand} = \frac{\text{Armlänge}}{\text{Daumenbreite}} \cdot \text{Objektbreite} \quad (*)$$

dadurch nieder, dass Armlänge und Objektbreite über und die Daumenbreite unter dem Bruchstrich stehen.

Natürlich wird man die Formel in Klasse 8 durch Geradengleichungen oder später durch den Strahlensatz begründen und ggf. durch Apps mit Schiebereglern wie in Abb. 5 veranschaulichen.
Dadurch, dass sich der höchst persönliche Peilquotient q = *Armlänge/Daumenbreite* als Faktor in der Formel (*) und als Geradensteigung in Abb. 5 wiederfindet, entsteht tatsäch-

- Armlängen und Daumenbreiten in Partnerarbeit gemessen,
- die individuellen Peilquotienten bestimmt,
- die Abstände berechnet, in denen man beim Anpeilen des DIN A3 Blattes quer (0,42 m) oder längs (0,297 m) gemäß Strahlensatzmodell (*) hätte stehen müssen,
- um wieviel Prozent die gemessenen Abstände sich von den berechneten unterscheiden,
  kurz: um wieviel Prozent man sich verpeilt hat.
- Die Abweichungen werden in ein gemeinsames Kalkulationsblatt eingetragen und wie in Abb. 6 veranschaulicht.

Zunächst fällt auf, dass der Strahlensatz trotz aller Messfehler die empirische Prüfung besteht: Median und Mittelwert der prozentualen Abweichungen zwischen Modell und Wirklichkeit liegen sehr nahe bei 0. Durch die Brille des Vorzeichentests gesehen liegt die relative Häufigkeit positiver Abweichungen

$(+)$ mit $\frac{38}{78} = 0{,}487$ voll im Prognoseintervall

$\left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{78}};\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{78}}\right] = [0{,}386;\ 0{,}613]$ zu $p(+) = 0{,}5$.

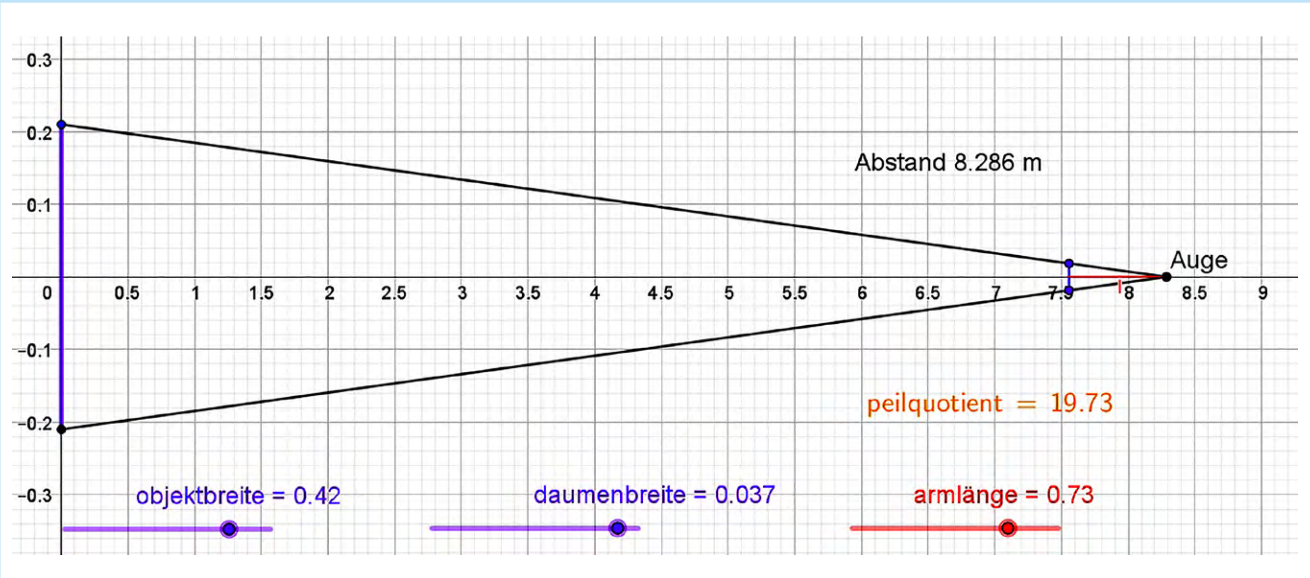

Abb. 5. Im Strahlensatzmodell werden aus Objektbreite, Daumenbreite und Armlänge Peilquotient und Abstand berechnet.

Die Boxenlänge (und auch die Standardabweichung 0,16) dokumentieren eine doch recht akzeptable Peilungenauigkeit in der Größenordnung von 20%.
Aber: natürlich sind auch die 20% nur „über den Daumen gepeilt“

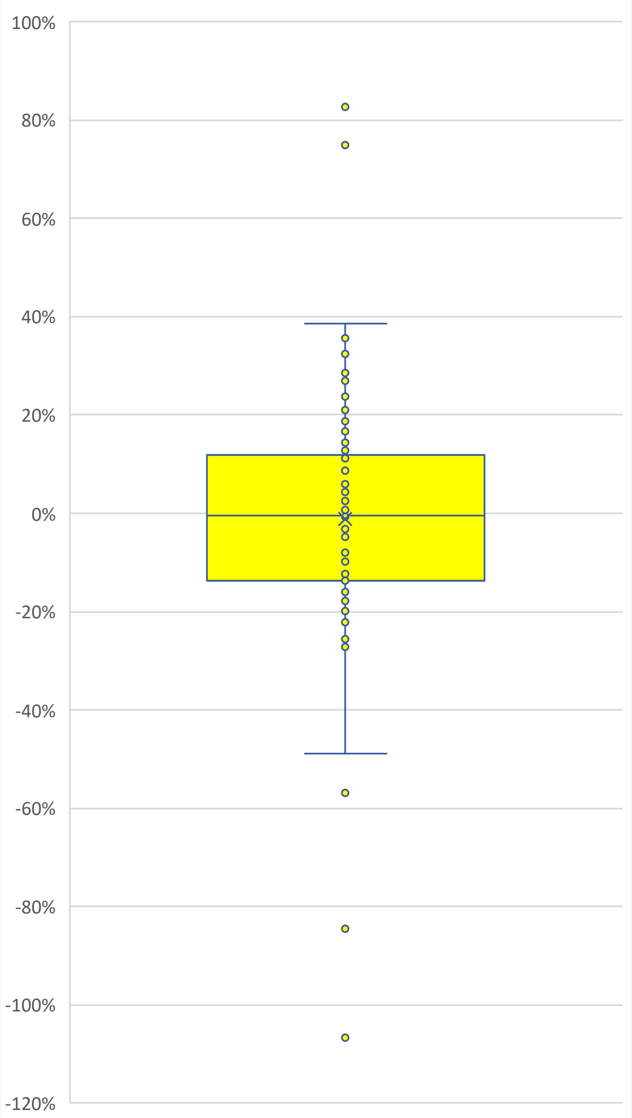

Abb. 6. Verteilung der (n = 78) prozentualen Abweichungen der gemessenen von den berechneten Abständen. Wenn man die 5 Ausreißer ignoriert ergibt sich die Standardabweichung 0,16.

7 Resümee

Daumenpeilexperimente und die Erforschung der Genauigkeit dieser Methode zur Abstandsbestimmung passen in geradezu idealtypischer Weise sowohl zu Winters erster Grunderfahrung (die sich in jeder Lehrplanpräambel findet) als auch zu Freudenthals „realistischem Mathematikunterricht“, den man wie folgt umschreiben kann:

- Stelle einen Kontext ins Zentrum,
- gib Schüler/innen Raum, sich aktiv mit diesem Kontext auseinanderzusetzen,
- langweile sie nicht mit Formalismen.

Das Datensammeln kann zeitökonomisch parallel zu einer Übungsphase in einer vorausgehenden Stunde erfolgen. Das weckt Neugier auf das Kommende und den vielfach als langweilig abgestempelten Strahlensatz.

Wer an höheren Peilgenauigkeiten interessiert ist, verwendet statt des Daumens am ausgestreckten Arm einen normierten Jakobsstab. Im Gegensatz zum Jakobsstab ist der Daumen aber stets dabei. Wie gesagt: „persönliche Bindung“!

Eine Excel-Kalkulationsvorlage zur Auswertung der Peilexperimente und die GeoGebra-Datei zu Abb. 5 sind in der Online-Ergänzung zu diesem Beitrag zum Download verfügbar.

mit online ergänzung www.mnu.de

Literatur

Lutz, T. (2022). Strahlensatz virtuell. *Digital unterrichten Mathematik*, 7. Seelze: Friedrich Verlag.
Riemer, W. (2023). *Statistik unterrichten – eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik*, Seelze: Kallmeyer.

Dr. Wolfgang Riemer, JG-Universität Mainz, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, w.riemer@arcor.de, ist Träger des Archimedes-Preises und seit kurzem auch der Bremerhavener MNU-Kapitänsmütze (Abb. 1).