Namensgebung
Zwip = Einerjump
zweierZwip = Zweierjump
Ich finde Zwip treffender, weil da Zwilling und paarweise drinsteckt

Der Varianzabakus ((erweitert den Mittelwertabakus aus LS NRW 6 … als Erinnerung im Anhang))

Die Varianz einer Verteilung inhaltlich deuten und durch einfaches Abzählen bestimmen

Hintergrund

Die Nützlichkeit der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V}$ einer Zufallsgröße X ergibt sich daraus, dass X bei „glockenförmiger“ Verteilung mit etwa 65% Sicherheit einen Wert im σ - Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ annimmt. Das belegen Datenerhebungen und Simulationen ((vgl. LE XX.)) Die Varianz erscheint dabei als rechnerische Hilfsgröße ohne inhaltliche Bedeutung.

Die Varianz zählt Streuvorgänge

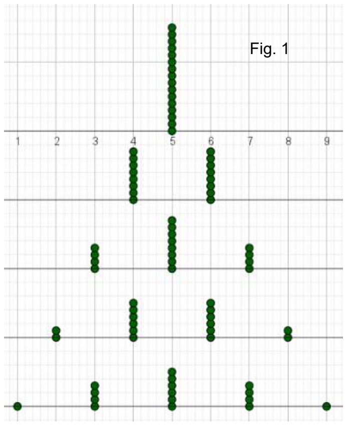

Fig. 1

8 Zwips

16 Zwips entsprechen
4 Zweierzwips

24 Zwips entsprechen
6 Zwips + zwei DreierZwips

32 Zwips entsprechen
4 Zweier- + 1 VividerZwips

Das ändert sich, wenn man Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Säulendiagramme aus Chips dadurch erzeugt, dass man - ausgehend von einer Säule im Erwartungswert - Chips paarweise um eine Einheit auseinanderspringen lässt und dabei die Sprungbewegungen mitzählt.
Fig. 1 dient als Beispiel:
Man startet mit 16 Chips die jeweils für die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ stehen. Da alle Chips auf der Position 5 stehen, ist der Erwartungswert dieser Verteilung μ=5, die Varianz ist 0. Wir bilden aus den 16 Chips 8 **Zwi**llings**p**aare und lassen (von der gemeinsamen Startstelle 5) einen Partner eine Einheit nach links, den anderen eine Einheit nach rechts springen (wir nennen das einen Zwip). Die zweite Verteilung entsteht damit aus der ersten durch 8 Zwips mit Gewicht $\frac{2}{16}$, da zwei Chips beteiligt sind). Wir zählen $8 \cdot \frac{2}{16} = 1$. Hätten wir die Verteilung durch 32 Chips dargestellt, wären statt 8 nun 16 Zwips je mit Gewicht $\frac{2}{32}$ nötig gewesen, um die zweite Verteilung zu erzeugen. Das Resultat $16 \cdot \frac{2}{32} = 1$ bleibt davon unberührt.
Tatsächlich ist die Varianz der der zweiten Verteilung $V_1 = (4-5)^2 \cdot \frac{8}{16} + (6-5)^2 \cdot \frac{8}{16} = 1.$
Die dritte Verteilung entsteht aus der zweiten durch weitere 8 Zwips (vier davon starten bei 4, die anderen vier an der Stelle 6) u. s. w.
Die vierte Verteilung ist somit aus der ersten durch insgesamt 8+8+8+8=32 Zwips hervorgegangen. Wir zählen $32 \cdot \frac{2}{16} = 4$. Tatsächlich ist die Varianz der der vierten Verteilung
$V_4 = (1-5)^2 \cdot \frac{1}{16} + (3-5)^2 \cdot \frac{3}{16} + (5-5)^2 \cdot \frac{6}{16} + (7-5)^2 \cdot \frac{3}{16} + (9-5)^2 \cdot \frac{1}{16} = 4.$
Es scheint, als könne man die Varianz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf diese Weise tatsächlich nur durch Zählen symmetrischer Sprünge um eine Einheit, bestimmen, die jeweils an der gleichen Stelle starten, kurz durch Zählen von Zwips.

2 Kontrolle

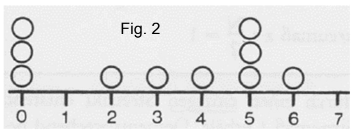

Fig. 2

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz V nebenstehender Verteilung aus 10 Chips.
b) Erzeugen Sie diese Verteilung durch Zwips aus einer Säule mit 10 Chips über dem Erwartungswert.
Es gibt viele Wege zum Ziel.
c) Kontrollieren Sie, dass die benötigte Anzahl der Zwips stets den richtigen Wett für die Varianz liefert, wenn man sie mit $\frac{2}{10}$ wichtet.

3 Große Sprünge

Max ist der Überzeugung, dass man zusätzlich zu den Zwips- auch mit ZweierZwips arbeiten kann, bei denen ein ZwillingsPartner zwei Einheiten nach links, der andere zwei Einheiten nach rechts springt. „Ein ZweierZwip muss dann aber zählen wie vier Zwips und ein Dreier-Zwip so viel wie 9 Zwips u. s. w.

a) Erläutern Sie an Fig. 1, wie Max argumentieren könnte.

b) Überprüfen Sie die Idee am Beispiel von Fig. 2 und an weiteren eigenen Verteilungen, die Sie durch (mittzählen von) Zwips aus einem Turm über dem Erwartungswert erzeugen.

Fig. 3

4 Den Abakus rückwärts spielen

Natürlich kann man den Abakus (mit Zwips und Mehrfachzwips) auch rückwärts spielen und so die Varianz einer vorgegebenen Verteilung durch Zählen ermitteln. Der Erwartungswert ergibt sich dann als Position der letzten Säule automatisch ((ganz nebenbei wie beim Mittelwertabakus)). Kontrollieren Sie diese Idee am nebenstehenden Beispiel. Berechnen Sie dazu den Erwartungswert und die Varianz der nebenstehenden Startverteilung und zählen Sie die nötigen (umgekehrten) Zwips. Erproben Sie drei Spielverläufe (auch mit MehrfachZwips) und bestätigen Sie, dass der Abakus unabhängig vom Spielverlauf das richtige Ergebnis für die Varianz liefert.

5 nicht ganzzahliger Erwartungswert

Bei nicht ganzzahligem Erwartungswert endet der (über ganzen Zahlen gespielte) Abakus mit Türmen auf benachbarten ganzzahligen Positionen. Nebenstehend sind das die Stellen 4 und 5. Wenn man die Unterteilung (wegen der 5 Chips auf Fünftel) verfeinert, dann lässt sich der Abakus mit FünftelZwips fortsetzen.

Fig. 4

a) Begründen Sie dass der erste Sprung die Varianz der dargestellten Verteilung um $\frac{2}{5} \cdot 0{,}2^2$ erhöht du dass der zweite sie um $\frac{2}{5} \cdot 0{,}4^2$ verringert.

b) führen Sie den Abakus fort und prüfen Sie, dass er die korrekte Varianz und den richtigen Erwartungswert liefert.

6 Warum der Abakus tatsächlich stets die Varianz und den Erwartungswert liefert

Man stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Erwartungswert μ durch n Chips dar. Zwei Chips springen von den Positionen k-d und k+d auf die Position k. Begründen Sie:

a) durch den Sprung ändert sich der Erwartungswert der Verteilung nicht.

b) Vor dem Sprung liefern sie zur Varianz den Beitrag (i) $\frac{1}{n}((k-d)-\mu)^2 + \frac{1}{n}((k+d)-\mu)^2$, nach dem Sprung den Beitrag (ii) $\frac{2}{n}(k-\mu)^2$ und (iii) durch den Sprung verringert sich der Beitrag zur Varianz um $\frac{2}{n} \cdot d^2$

d) Begründen Sie hiermit, warum der Abakus Erwartungswert und die Varianz liefert.

7 Additivität der Varianz bei Summenexperimenten

a) Stellen Sie die zum nebenstehenden Glücksrad gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung durch 9 Chips dar.

b) Erläutern Sie durch bewegen der Chips, wie Sie hieraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Punktsumme aus zwei Drehungen des Glücksrades erhalten.

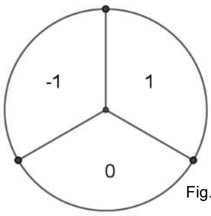

Fig. 5

c) Begründen Sie, dass bei Summenexperimenten, die man dadurch erhält, dass man ein Zufallsexperiment zweimal (bzw. n-mal) durchführt und die einzelnen Ergebnisse summiert, die Varianz der Punktsumme doppelt (bzw. n-mal) so groß sein muss wie die Varianz eines Summanden. Ein Blick auf Fig. 1 kann helfen.

Mittelwertabakus

Säulendiagramme aus Chips

Sarah würfelt so lange, bis sie eine Sechs erhält. In fünf Spielen benötigt sie dabei 1-mal einen Wurf, 2-mal drei, 1-mal vier und 1-mal neun Würfe. Dies ist in einem Säulendiagramm aus Chips veranschaulicht (Fig. 1, Reihe a).
Ein solches Säulendiagramm hat gegenüber einer Strichliste den Vorteil, dass man nur durch Verschieben von Chips bestimmen kann, wie viele Würfe beim Warten auf die Sechs im Mittel erforderlich waren.

Lerneinheit 2
Seite 185

Der Abakus

1. Ein Chip auf Position 1 und einer auf Position 3 bedeutet für die benötigte Wurfzahl das Gleiche wie beide Chips auf Position 2, denn die zugehörigen Wurfzahlen summieren sich in beiden Fällen auf 4.
Man kann immer zwei beliebige Chips um gleich viele Schritte aufeinander zubewegen, ohne an der gesamten Wurfzahl (= Wartezeit) etwas zu verändern.

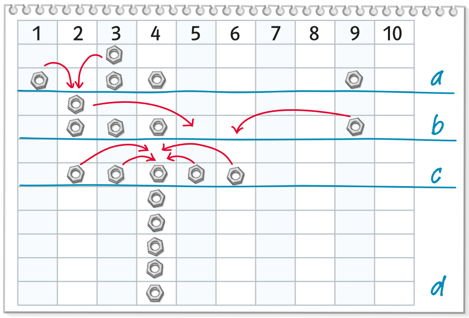

Fig. 1

Abakus (lat.) = Rechenhilfsmittel

Kleine Schraubenmuttern als Chips lassen sich mit einer Bleistiftspitze gut verschieben

Wenn man die Chips auf diese Weise paarweise verschiebt, erhält man, wie in Fig. 1 gezeigt, schließlich einen Turm bei Position 4.
Es ist also so, als ob Sarah bei jedem der fünf Spiele immer 4 Würfe benötigt hätte, um eine Sechs zu werfen. Man nennt 4 den **Mittelwert** oder das **arithmetische Mittel**.

2. Es kann passieren, dass bei den symmetrischen Bewegungen der fünf Chips am Ende zwei Türme auf benachbarten ganzzahligen Positionen, z. B. auf 5 und 6, stehen bleiben wie in Fig. 2 (Reihe a). Der Abakus ist dann nicht aufgegangen, der Mittelwert liegt zwischen 5 und 6.
Unterteile dann den Zwischenraum zwischen den Türmen beispielsweise in Fünftel und bewege die Chips paarweise um Fünftelschritte aufeinander zu. Dann geht der Abakus wieder auf.
In Fig. 2 ergibt sich z. B. der Mittelwert 5,6.

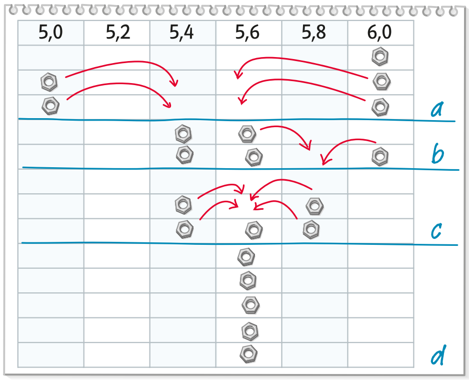

Fig. 2

Entsprechend kann man bei 10 Chips mit Zehntelschritten weiterspielen

Den Abakus erkunden und für Mittelwertberechnungen nutzen

- Baue das Säulendiagramm aus Fig. 1 (Reihe a) mit fünf Chips nach und bestätige, dass der letzte Turm stets bei 4 steht, egal welche Chips man in welcher Reihenfolge aufeinander zubewegt.
- Protokolliere ein eigenes Spiel „fünfmal Warten auf eine Sechs" durch ein Säulendiagramm aus fünf Chips. Bestimme den Mittelwert zu diesem Säulendiagramm (also die mittlere Anzahl der Würfe) nach der oben beschriebenen Anleitung.
- Multipliziere im Säulendiagramm aus Reihe a in Fig. 1 die Positionen mit der Anzahl dort liegender Chips und bilde ihre Summe $(1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = \ldots)$. Teile die Summe durch die Anzahl der Chips (hier also durch 5). Was fällt dir auf? Überprüfe auch an anderen Beispielen.

Interaktives Forschen
Mittelwertabakus
mg7np5