Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird

WOLFGANG RIEMER, KÖLN

Zusammenfassung: *Wenn man sich die im Titel genannte Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu eigen macht, verschwinden viele curriculare Verwerfungen. Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe der Sekundarstufe (Laplace, frequentistisch[1]) wachsen nahtlos mit dem subjektivistischen aus Primarstufe und Lebensalltag zusammen. In der Sekundarstufe verschwinden die Gräben zwischen beurteilender und beschreibender Statistik und - das mag paradox erscheinen - Kolmogoroffs Axiomatik wird aus didaktischer Sicht rehabilitiert. Zu schön um wahr zu sein? Nein! Ergebnis jahrelanger Handlungsforschung vor Ort. Absolut zentral ist für uns dabei die beim frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff häufig unterlassene messerscharfe(!) Trennung der Modellebene, auf der die Wahrscheinlichkeiten leben (und nach vorne schauen) von der Realitätsebene, in der die relativen Häufigkeiten leben (und in die Vergangenheit zurückschauen).[2]*

1 Pierre-S. Laplace und sein Bleistift

Es muss eine schleppend sich dahinziehende Konferenz gewesen sein, in der ich aus Langeweile einen Bleistift, dessen Seiten ich zuvor mit 1 bis 6 beschriftet hatte – eine Strichliste führend – heimlich über den Tisch rollen ließ. Als sie entdeckte, was sich da bei mir abzuzeichnen begann (Zitat: Dass gibt's doch nicht!"), zog auch Dorothée, eine ansonsten eher mathephobe Theologin, ungläubig einen Stift aus ihrem Mäppchen und begann (ebenfalls heimlich) zu rollen:

Wolfgang	1	2	3	4	5	6	
rechtsrum	28	21	3	1	23	44	120
linksrum	47	12	21	18	0	22	120

Dorothée	1	2	3	4	5	6	
rechtsrum	40	20	12	23	17	8	120
linksrum	12	7	38	12	6	45	120

Abb. 1: Bleistifte entfalten beim Rollen eine erstaunliche Individualität. Es gibt nur sehr wenige, bei denen die Gleichverteilung nach Laplace ein gutes Modell darstellt.

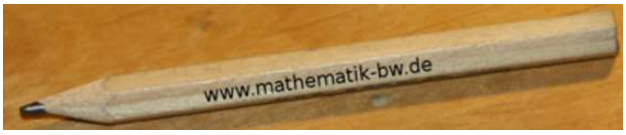
Ihr Resümee: „Ich fall vom Glauben ab."

Was war hier passiert? Obwohl Dorothée in ihrer Schulzeit nie Stochastik hatte, erwartete sie aufgrund alltäglicher Symmetrieerfahrungen bei 120 Rollversuchen „ca. 20-mal" für jede der sechs Bleistiftseiten. Aus ihren Alltags*erfahrungen* waren ganz im Sinne der Überschrift (Laplace-) *Wahrscheinlichkeiten* als mentales Modell der Wirklichkeit *entstanden*. Statistiker sprechen hier von einer Laplace-Hypothese. Und was sie da beobachtete, widersprach ihren Erwartungen eklatant. Sie erlebte, an diesem authentischen Beispiel, was es inhaltlich bedeutet, wenn Statistiker bezweifeln, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ein gutes Modell der Wirklichkeit darstellt.

2 Signifikanztest

Dass sich (zumindest das mathematische) Ergebnis dieser Konferenz zwischenzeitlich herumgesprochen hat, zeigt die Bleistiftaufgabe auf dem Bildungsserver des Landesinstituts in Baden-Württemberg:[3]

Man *vermutet*, dass die markierte Bleistiftseite mit der Wahrscheinlichkeit p=1/6 oben liegen bleibt (Trefferwahrscheinlichkeit H_0: p=1/6). Bei einem Test zählt Jana in 300 Versuchen 36 Treffer.



Da 36 außerhalb des 2σ Intervalls [38;62] liegt, ist die Vermutung ________?
(Hier soll *unwahrscheinlich* eingesetzt werden.)

Die Hypothese H_0: p=1/6 wird verworfen.

Wir können aber nicht sicher sein, dass H_0: p=1/6 falsch ist, denn in etwa 5% aller Fälle können durchaus weniger als 38 oder mehr als 62 Treffer auftreten. Wenn wir behaupten H_0: p=1/6 sei widerlegt, so irren wir uns mit Wahrscheinlichkeit

$P(\text{Irrtum}) = P(X < 38) + P(X > 62) = 0{,}052.$

Abb. 2: Testergebnisse deuten

Die gut gemeinte Warnung „Wir können nicht sicher sein, dass p=1/6 falsch ist" führt in die *Sackgasse*! Tatsächlich kann man sogar *absolut* sicher sein, dass p=1/6 nicht gilt. Um das sagen zu können, hätte Jana ihren Bleistift nicht einmal rollen müssen, denn in der Realität sind alle Hypothesen falsch und bei hinreichend großem Stichprobenumfang lässt sich jede Hypothese auf jedem Signifikanzniveau verwerfen. Ebenso weist der Lückentext *unwahrscheinlich* zur Bewertung der Gültigkeit einer Hypothese in eine *gefährliche Richtung*: Die verkürzte Aussage: Wenn wir p=1/6 verwerfen, irren wir mit P(Irrtum) ~5% wird (nicht nur von Schülerinnen und Schülern) dahingehend gedeutet, dass wir beim Verwerfen zu ~95% nicht irren, also richtig liegen[4]. Und diese Deutung ist fatal, denn Tests machen (obwohl dies durch den Lückentext *unwahrscheinlich* suggeriert wird) keine quantitativen Aussagen über subjektive Sicherheiten, mit denen Hypothesen gelten, sondern nur über Wahrscheinlichkeiten für (kritische) Ereignisse bei unterstellter Gültigkeit von Hypothesen, die eigentlich keinen Anwender interessieren.

Wenn Schülerinnen und Schüler nicht nur Signifikanztestaufgaben durchgerechnet, sondern genau wie Dorothée tatsächlich auch Bleistifte gerollt haben, dann haben sie *erlebt*, dass Experimente höchstens qualitative Antworten auf die Frage nach der Güte oder Brauchbarkeit von Modellen liefern, nicht aber auf Fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der Modelle richtig oder falsch sind. Damit liefert das Bleistiftrollen – trotz aller Einfachheit – befriedigendere Antworten auf die Frage nach der Bedeutung statistischer Testverfahren als so manche theoretische Abhandlung.

3 Spekulieren: Der hypothetische Charakter *aller* Wahrscheinlichkeitsangaben und das Vertrauen in Hypothesen

Das Bleistiftrollen hat - genau wie das Würfeln oder das Werfen von Münzen den Nachteil, dass wegen der Symmetrien nur eine plausible Hypothese, nämlich die Laplace'sche, im Raum steht.

Das ändert sich grundlegend, wenn wir Schülerinnen und Schüler, sobald sie mit Prozentzahlen vertraut sind, mit dem Auftrag aus Abb. 3 konfrontieren.

„Schaut euch euren Quader genau an und schätzt nach Bauchgefühl die *Chancen*[5] *der sechs Augenzahlen in Prozent*. Nicht würfeln. Nur schätzen! Ungefähr!

Abb. 3 Quader (1,3·2·2,3cm³) mit Schätzauftrag.

Die Lernenden akzeptieren das Würfelverbot. Sie kneifen die Augen zusammen, tuscheln miteinander und nennen anschließend bereitwillig „Prozentzahlen" von denen man einige festhält wie in Abb. 4.
Dabei beachten sie intuitiv

- zu Gegenseiten gehören gleiche Chancen (Symmetrieerfahrung),
- große Seitenflächen haben große Chancen (weil sie stabil liegen, hochkant stehende Kisten fallen erfahrungsgemäß auch schnell um),
- alle Chancen addieren sich zu 100% (intrinsisch mit dem Prozentbegriff verknüpft).

Das Missachten eines Punktes führt zu fruchtbaren Diskussionen, in deren Verlauf Schülerinnen und Schülern der Unterschied zwischen Modellebene (Wahrscheinlichkeit, vor dem Versuch gefühlt und Teilsymmetrien widerspiegelnd) und Realitätsebene (Häufigkeit, nach einem Versuch ermittelt, nur annähernd teilsymmetrisch) bewusstwird.

Würfeln mit Quadern: Schätzungen vor dem Experiment								
	1	2	3	4	5	6	Summe	Vertrauer
Rene	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
Johanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
Fläche in cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
Fläche in %	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	10%

Abb. 4: Schätzungen nach Bauchgefühl und Abstimmung über das Vertrauen in die sechs Hypothesen.

In Abb. 4 stellte sich während der Diskussion heraus: Johanna hatte erst die Chancen für 1-6 und 3-4 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2-5 zu viel übrigbleibt; Alexandra dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen.

Oft werden die Quader auch ausgemessen und die Wahrscheinlichkeit 100 % wird proportional zu den Flächen auf die Quaderseiten verteilt wie in der letzten Zeile von Abb. 4.

Man sollte den Stolz nicht unterschätzen, den Siebtklässler empfinden, wenn sie erfahren, dass sie in der Sprache der Berufsstatistiker soeben Hypothesen über das Verhalten der Quader aufgestellt haben und dass die Proportionalitätshypothese auch unter Mathematikern viele Freunde hat. Wir halten fest: Aus den guten Erfahrungen mit Symmetrien und Proportionalitäten und weniger guten mit der Schwerkraft sind Wahrscheinlichkeiten entstanden.

Glaubwürdigkeit: Die Diskussion wird abgeschlossen durch eine Abstimmung über die Glaubwürdigkeit der notierten Verteilungen (letzte Spalte in Abb. 4). Dabei erleben die Schülerinnen und Schüler, dass Prozentskalen im Alltag auch ausdrücken, wie sehr man auf Aussagen vertraut - oder an die Brauchbarkeit von Modellen glaubt. So hält die Klasse Jasmins Hypothese mit 50% Stimmen für plausibler als Stefans. Und die mühsam berechnete Proportionalitätshypothese scheint in dieser Klasse 7 weniger glaubwürdig, weil die Wahrscheinlichkeiten der Seitenpaare 2-5 und 1-6 zu nahe beieinander liegen und für 3-4 zu wenig übrigbleibt. Man könnte von „**Vertrauens**wahrscheinlichkeiten" sprechen, die versuchen, **Unsicherheiten** oder **Glaubwürdigkeit** zu beschreiben.

4 The misssing Link

Aber woran liegt es, dass es Siebtklässlern von Flensburg bis Berchtesgaden (also unabhängig von landesspezifischen Curricula) keinerlei Schwierigkeiten bereitet, vor Durchführung entsprechender Experimente Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie in Abb. 4 zu formulieren, an denen Kolmogoroff seine Freude gehabt hätte? Gehen nicht Lehrplankommissionen seit Jahrzehnten davon aus, man brauche beschreibende Statistik mit relativen Häufigkeiten, um daraus über das empirische Gesetz der großen Zahlen Wahrscheinlichkeiten zu extrahieren?

Die Antwort ist viel einfacher als man denkt, aber bisher nirgends publiziert[6].

Im Alltag nutzen wir subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertungen, die auf Erfahrungen (hier mit dem SATURN-Reparaturservice) beruhen:

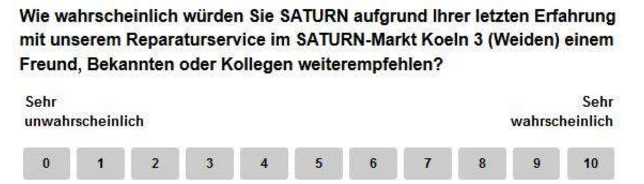


Abb. 5 subjektive Wahrscheinlichkeiten im Alltag

Sie werden in der Primarstufe auf einer Skala zwischen völlig unmöglich und ganz sicher lokalisiert.

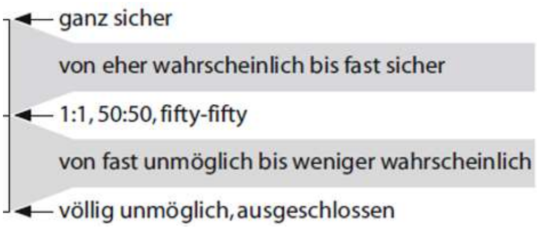


Abb. 6: subjektive Wahrscheinlichkeiten, Grundschule nach Krüger & Sill & Sikora (2015).

Wenn Maike mehrmals mitbekommen hat, dass ihre Grundschullehrerin am letzten Schultag vor den Ferien ein Eis spendiert hat, wird sie sich auf der Skala nahe bei „ganz sicher" (vielleicht bei 8 von 10) positionieren, wenn sie nach ihrer Einschätzung für den kommenden letzten Schultag befragt wird. Aus ihrer *Erfahrung* ist *Erwartung* geworden.

Sobald Schülerinnen und Schüler mit dem Prozentbegriff vertraut sind, wird das untere Skalenende „völlig unmöglich" *vom Lehrer (!)* mit 0% und das obere „ganz sicher" mit 100% beschriftet.

Diese Beschriftung ist ein Kunstgriff, dessen Genialität für die Begriffsbildung in der didaktischen Literatur bisher noch an keiner Stelle gesehen wurde.

Nur durch die Beschriftung der Ränder erhält jede Stelle der Skala nämlich urplötzlich die Bedeutung eines Prozentsatzes. Und Siebtklässler wissen, dass bei festem Grundwert n zu jedem Prozentsatz p der Prozentwert n·p gehört. Bei reproduzierbaren Situationen ist n die Versuchszahl und n·p wird zur erwarteten Häufigkeit, kurz zum Erwartungswert, um den herum die Ergebnisse zufällig pendeln.

Damit wurde der qualitative subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff der Primarstufe quantitativ-prognostisch.

So wird die Stelle 25% bei n = 300 Wiederholungen mit der erwarteten Häufigkeit 300 · 0.25 = 75 verknüpft[7]. Sollte dann bei vielen 300er Versuchen das fragliche Ergebnis immer wieder deutlich unter der Erwartung 75 liegen, korrigiert man die Angabe 25% nach unten. *Die Erfahrung hat die Erwartung modifiziert* (oder ggf. auch abgesichert). Und damit hat man die Schleife eines Modellbildungskreislaufs durchlaufen.

5 Experimentieren

Und genau das passiert, wenn man nach der Phase des Spekulierens das mit Spannung erwartete Experiment befragt. Jeder würfelt 100-mal, so dass die absoluten sofort auch als relative Häufigkeiten gelesen werden können. Die Ergebnisse werden wie in Abb. 7 in 5er Gruppen samt revidierter Wahrscheinlichkeitsverteilungen in eine gemeinsame Tabelle eingetragen, ggf. auch langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert.

6 Reflektieren

Das verlangsamende Mitschreiben hat den Vorteil, dass Zufallsschwankungen (vgl. die 48 Vierer bei Tobias) sehr bewusst wahrgenommen werden und

(1) man erlebt, dass sich die Zufallsschwankungen der relativen Häufigkeiten durch das Kumulieren in Gruppen verkleinern, aber nie verschwinden, und

(2) dass die Modelle (die verbesserten Wahrscheinlichkeitsverteilungen) aller Gruppen die Teilsymmetrien der Quader widerspiegeln.
Nach dem Zusammenfassen der Häufigkeiten aller Gruppen (Abb. 7, Zeile 55) einigt man sich im Plenum auf eine oder mehrere nahe beieinander liegende Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Zeilen 57, 58), in die man sehr viel mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem hohlen Bauch heraus aufgestellten".

(3) man erlebt, dass sie durch weitere Versuche evtl. noch ein bisschen verbessert werden können, wobei sich die kleinen Verbesserungen dann aber als vergleichsweise irrelevant herausstellen.

B55 =B54/$H54

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Würfeln mit Quadern: 0,2l Würfelbecher auf den Tisch gestülpt							
2	Name	1	2	3	4	5	6	
3	Patrick	10	6	28	41	4	11	100
4	Daniel	6	7	35	45	4	3	100
5	Binoy	7	4	37	34	1	17	100
6	Tobias	3	6	48	33	6	4	100
7	Michael	12	0	28	42	7	11	100
8	absolute H.	38	23	176	195	22	46	500
9	relative Häufigkeit	7.6%	4.6%	35.2%	39.0%	4.4%	9.2%	100%
10	Modell Gruppe 1	8%	4.5%	37.5%	37.5%	4.5%	8.0%	100%
11								
12	Paula	11	6	34	32	7	10	100
13	Elaine	14	10	28	24	9	15	100
14	Marie	4	6	41	32	11	6	100
15	Marga	10	6	34	29	7	14	100
16	Sandra	7	4	30	37	4	18	100
17	absolute H	46	32	167	154	38	63	500
18	relative Häufigkeit	9.2%	6.4%	33.4%	30.8%	7.6%	12.6%	100%
19	Modell Gruppe 2	10%	8%	32%	32%	8%	10%	100%
20	…….							
48	Ines	13	10	23	36	6	12	100
49	Jessi	12	8	27	38	7	8	100
50	absolute H.	25	18	50	74	13	20	200
51	relative H in %	12.5%	9.0%	25.0%	37.0%	6.5%	10.0%	100%
52	Modell Gruppe 6	11%	8%	31%	31%	8%	11%	100%
53								
54	alle zusammen	279	207	834	883	204	293	2700
55	relative Häufigkeit	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	100%
56								
57	Modell A	11%	8%	31%	31%	8%	11%	100%
58	Modell B	10.5%	8%	31.5%	31.5%	8%	10.5%	100%
59								
60	Proportionalitätsmodell: Kanten (cm)			2.3	2	1.3		
61	Fläche in cm²	2.99	2.60	4.60	4.60	2.60	2.99	20.38
62	Flächenanteil	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%

Abb. 7: Nach 2700 Würfen einigt man sich auf zwei Modelle in den Zeilen 57, 58. Zeile 62 zeigt die unbrauchbare Proportionalitätshypothese zum Vergleich.

Das fasst man fürs Regelheft wie folgt zusammen:

Bei Zufallsexperimenten kann man einzelne Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann ihnen aber Wahrscheinlichkeiten zuordnen, die zusammen 100% ergeben.

Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt,

- wenn man Symmetrien beachtet,
- **w**enn die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeit liegen,
- **wenn** die relativen Häufigkeiten bei Versuchswiederholungen zufällig um die Wahrscheinlichkeiten pendeln, mal etwas darüber liegen, mal etwas darunter.

Die Wahrscheinlichkeiten drücken aus, wo man zukünftig in etwa die relativen Häufigkeiten erwartet.

Je mehr Erfahrungen zugrunde liegen, desto größer das *Vertrauen* in die aufgestellten Wahrscheinlichkeiten.

Realitätsebene	**Modellebene**
$h_1 + \dots + h_n = 100\%$	$p_1 + \dots + p_n = 1\ (\mathbf{100\%})$
relative Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten
leben im Becher	leben im Kopf
schauen zurück	schauen nach vorne
schwanken zufällig	werden festgelegt, bezweifelt, verbessert
Im Fall von Teilsymmetrien	
ungefähr gleich	genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$

Abb. 8a/b: Regelhefteintrag mit präziser Abgrenzung der Realitäts- von der Modellebene

7 Die Wahrscheinlichkeit rutscht runter

Beim Quader sorgen gute Erfahrungen mit Symmetrien, Proportionalitäten und schlechte Erfahrungen mit der Schwerkraft dafür, dass es uns leichtfällt, plausible Wahrscheinlichkeitsverteilungen hinzuschreiben. Genauso ist das beim Glücksrad, das dadurch entsteht, dass man einen Zeiger um einen Pin rotieren lässt. Bei horizontaler Unterlage wird niemand an einer Gleichverteilung zweifeln. Und im Gegensatz zum Bleistift geben Experimente keinen Anlass, an der Güte des Laplace-Modells zu zweifeln.

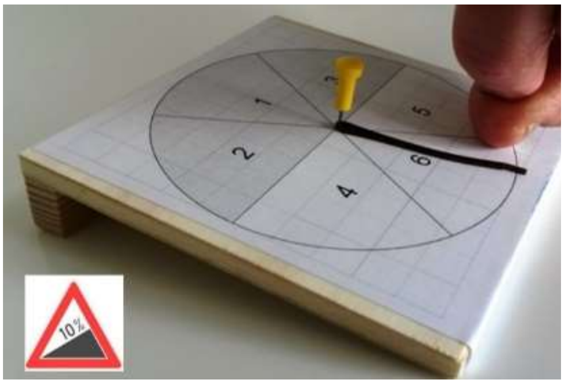


Abb. 9: Rotierende Haarklemme auf schiefer Ebene

Aber jetzt passiert es! Wir neigen die Unterlage zu einer schiefen Ebene wie in Abb. 9. Wie ändern sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten? Eine spannende Frage, über die man wieder trefflich spekulieren kann. Hier einige Zitate aus einer Klasse 8:

- Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten und zwar umso mehr je schiefer das Brett steht.
- Genau! Das ist wie beim Fahrrad mit dem Ventil. Rechts und links ist es gleich, weil die Unterlage nur nach vorne geneigt ist, nicht zur Seite.
- Ich vermute, oben hält der Zeiger wahrscheinlicher, weil da der Schwung aufgebraucht ist. Des-

wegen bleiben Uhren auch immer oben stehen, wenn die Batterie alle ist.

- 10% ist viel zu flach, das rutscht noch nichts! Alle sechs Felder bleiben gleich wahrscheinlich.

Genau wie beim Quader in Abb. 3 und 4 werden aus Alltagserfahrungen Erwartungen, die man wie in Abb. 10 in Prozentzahlen übersetzt. Einige werden festgehalten (und ggf. wieder zur Abstimmung über deren Vertrauenswürdigkeit freigegeben).

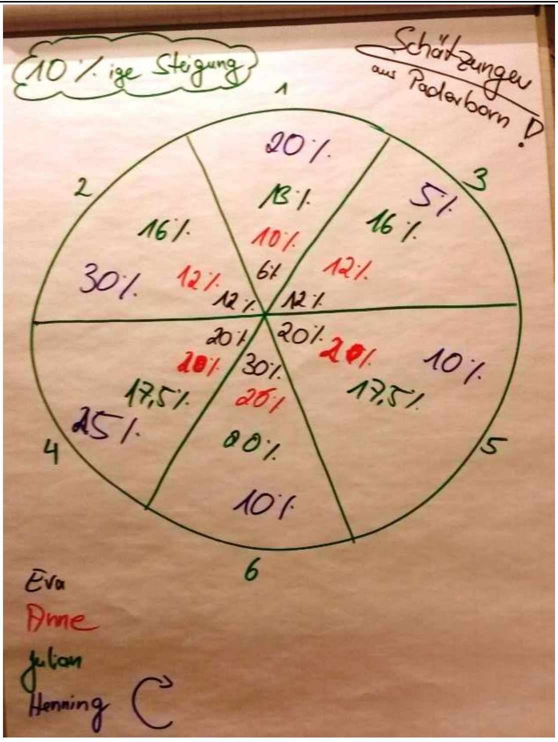


Abb. 10: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, gegen die Kolmogoroff nichts einzuwenden hätte. Nur Henning vermutet einen Einfluss der Drehrichtung.

Und wieder fallen (nicht nur Kinder) von Glauben ab, wenn sie jetzt schnippen: Volle Kanne im Uhrzeigersinn! Vom Feld 6 (unten) aus! Abb. 11 zeigt (im Inneren des Kreises) die relativen Häufigkeiten der sechs Felder bei 2257 Versuchen. Gegen alle Erwartung rutscht die Wahrscheinlichkeit nicht nach unten und auch nicht nach oben, sondern bergauf (nach links), also dahin, wo der Zeiger hochklettern muss. Die erwartete rechts-links-Symmetrie weicht einer oben-unten Symmetrie.

Mit den Erfahrungen, die man beim Radeln macht, kann man die Entdeckung in Klasse 7 auch qualitativ begründen: „Bergauf bremst es, da bleibt man schnell stehen. Aber wenn man es mit Schmackes (so sprechen Siebtklässler im Rheinland) über den Gipfel geschafft hat, kommt der verlorene Schwung zurück.“

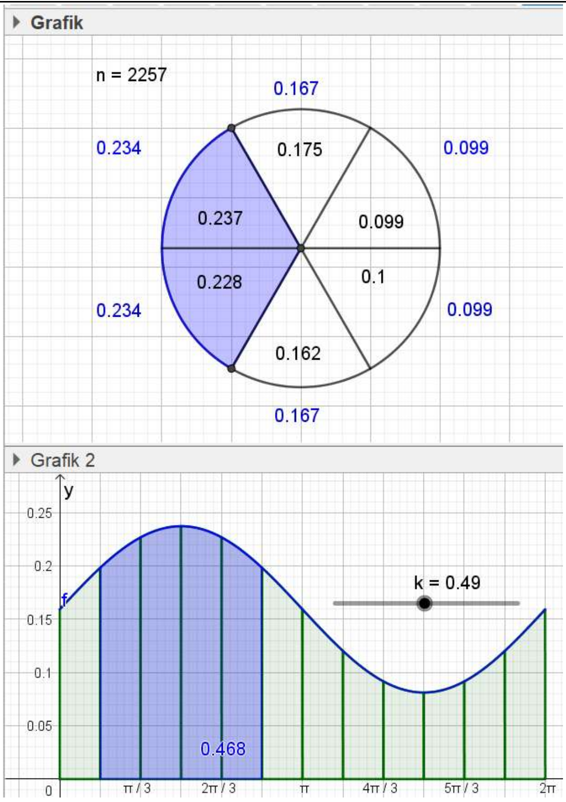


Abb. 11: Relative Häufigkeiten nach 2257 Versuchen (im Kreis) und Wahrscheinlichkeiten (außerhalb), die mit einer Sinus-Wahrscheinlichkeitsdichte zu $k = 0{,}49$ berechnet wurden

9 Optionale Tiefbohrungen

Im Leistungskurs kann man vertiefen:

(1) Wenn man annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Feldes proportional zur Energie ist, die der Zeiger dort durch Reibung und Umwandlung von Bewegungs- in Lageenergie verliert, dann lassen sich die Wahrscheinlichkeiten durch die Sinusdichte

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi}\,(1 + k\sin(x)), 0 \le x \le 2\pi$$

beschreiben. Der Parameter $k = m/\rho$ ist proportional zur Steigung m der Ebene und umgekehrt proportional zum Gleitreibungskoeffizienten ρ, der angibt, mit welchem Teil seines Gewichts der Zeiger auf der Unterlage gebremst wird. Dieses Modell beschreibt die Realität solange ausgezeichnet, wie der Zeiger wegen zu starker Neigung nicht von selbst nach unten rutscht - wie das Ventil beim Fahrrad.

(2) Wenn man die barometrische Höhenformel, auf den Quader überträgt, erhält man auch hier ein ausgezeichnetes Modell. Man macht den Ansatz $p(i) \sim e^{-kh_i}$. Dabei ist h_i die zur Lage i gehörige Schwerpunkthöhe und k hängt von der Wurftechnik ab. Näheres zu den Vertiefungen in Riemer (2023).

10 Auch Didaktik hat ihre Axiome

Die folgenden Zitate aus dem Standardwerk Büchter & Henn (2007, S. 182) und Christianes Examensentwurf (Abb. 13) bringen die Unterschiede zwischen unserer ganzheitlichen Sicht auf Wahrscheinlichkeit und dem derzeit praktizierten „State oft he Art“ auf den Punkt:

> Wir gehen aus von der **Existenz** einer dem Zufallsexperiment innewohnenden **objektiven Wahrscheinlichkeit**, die wir durch verschiedene Ansätze näherungsweise zu bestimmen versuchen.
>
> **1.** Der **Laplace**-Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein **theoretischer** Ansatz a priori, d. h. vor Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments, rein aus der Vernunft gewonnen.
>
> **2.** Der **frequentistische** Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein **empirischer** Ansatz a posteriori, d. h. nach Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments gewonnen.
>
> **3.** Der **subjektive** Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein **theoretischer** Ansatz, in dem häufig eigene Erfahrungen verankert sind.“
>
> Abb. 12: „Axiome“ der Stochastik-Didaktik.
> Die Unterschiede zwischen Modell- und Realitätsebene verschwimmen. Nur in 3. Geht es um eigene Erfahrungen.

> 1.+2. Std.: Erarbeitung der Bestimmung **relativer Häufigkeiten** zur Bereitstellung von Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.
>
> 3. Std.: Darstellung von **Wahrscheinlichkeiten alltäglicher Ereignisse** mithilfe einer Wahrscheinlichkeitsskala zur Aktivierung von Alltagserfahrungen und Vorbereitung einer Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten.
>
> 4. Std.: Entdecken des empirischen Gesetzes der großen Zahlen am Beispiel des Werfens einer Reißzwecke zur Entwicklung eines **frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs**.
>
> 5. Std.: Näherungsweise Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten teilsymmetrischer Körper am Beispiel eines allgemeinen Quaders zur Entwicklung eines **differenzierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs.**
>
> 6. Std.: Herleitung der **Laplace-Regel** für Elementarereignisse am Beispiel symmetrischer Körper zur Entwicklung eines **theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs**.
>
> Abb. 13: … und wie sie Christianes Examensreihe beeinflussen.

Die strikte Trennung der drei in Büchter & Henn genannten Wahrscheinlichkeitsansätze hat eine lange Tradition. Wegen ihrer Griffigkeit wurde sie von Lehrplankommissionen nie hinterfragt. Seit Jahrzehnten bestimmt sie die Struktur von Schulbüchern und Unterrichtentwürfen. So formuliert T. Rolfes im Zusammenhang mit seinen Querschnittstudien zum Wahrscheinlichkeitsbegriff auf der GDM-Tagung 2022 in Fuldatal:

- Die curricularen Vorgaben basieren bisher fast ausschließlich auf theoretischen Überlegungen.
- Die Bildungsstandards der Primarstufe und der Sekundarstufe sind bzgl. des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wenig abgestimmt.
- In der Klassenstufe 6/7 werden der klassische (Laplace‘sche) und der frequentistische Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff isoliert voneinander unterrichtet.
- Ist die mangelnde Integration von klassischem und frequentistischen Zugang u.a. Ursache für Verständnisschwierigkeiten?
- Es stellt sich die Frage, wie die unterschiedlichen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff integrativ so unterrichtet werden können, dass intuitive Schülervorstellungen gewinnbringend in den Stochastikunterricht einfließen.[8]

Durch die Brille eines Lernenden gesehen gibt die im letzten Spiegelpunkt gestellte Frage massiven Anlass, an der Sinnhaftigkeit der klassischen Kategorisierung aus Abb. 12 zu rütteln, denn:

- Von „eigenen Erfahrungen“ ist dort nur bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten die Rede. Aber was unterscheidet diese eigenen Erfahrungen von den Symmetrieerfahrungen, auf die man beim Laplace-Ansatz zurückgreift? Nichts! Was unterscheidet sie von den Erfahrungen, die man beim frequentistischen Ansatz in einer „langen“ (immer länger werdenden) Versuchsserie gesammelt hat, bevor man sich auf eine brauchbare Wahrscheinlichkeit für Kopflage beim Wurf einer Reißzwecke angibt? Nichts!
- Für die Begriffsbildung ist die konsequente Trennung von Modell- und Realitätsebene (wie in Abb. 8 ausgeführt) viel hilfreicher als Unterscheidung der Kategorien „theoretischer Ansatz“ versus „empirischer Ansatz“.
- Dadurch, dass Schülerinnen und Schüler in den Abschnitten 1-6 alle hingeschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen als sinnvolle, vom Menschen gemachte Modelle der Realität[9] erleben, die einem steten Modellierungskreislauf unterliegt, weil aus anderen oder weiteren Erfahrungen andere Modelle entstehen, wird es möglich auf, *höchst merkwürdige (!)* Merkkästen wie in Abb. 14, 15 und 16 zu verzichten.

> Wenn ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt wird, dann stabilisiert sich die relative Häufigkeit der Ergebnisse **um** einen **festen** Wert P(A). **Dieser Wert** heißt Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses A.
>
> Abb. 14: Fundamente Mathematik 7 NRW 2019. S.189.

Wird ein Zufallsexperiment sehr viele Male wiederholt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. Diese relativen Häufigkeiten sind dann die Wahrscheinlichkeiten.

Abb. 15: http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/index.htm („teste dein Wissen“

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die für eine gegen unendlich strebende Anzahl von Durchführungen des betreffenden Zufallsexperiments vorausgesagte relative Häufigkeit seines Eintretens.

Abb. 16: https://www.mathe-online.at/mathint/lexikon/w.html

J. K. Rowling definiert in ihren Harry-Potter-Bänden Lord Voldemort als „denjenigen, dessen Name nicht genannt werden darf“ oder als „Du weißt schon wer“. Dokumentieren nicht die obigen Aussagen, wie sehr die frequentistische Wahrscheinlichkeit zum Lord Voldemort der Stochastik wird, zu derjenigen, „deren Wert nicht bestimmt werden kann“ oder als „Du weißt schon welche“? Bei allem Respekt vor Magie: Wir kontern mit dem Regelhefteintrag aus Abb. 8a/b.

11 Die hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsauffassung

Weil in den Köpfen der Lernenden - das kommt in den Axiomen aus Abb. 12 leider nicht zum Ausdruck - alle Wahrscheinlichkeiten Erwartungen beschreiben, Vorhersagen machen wollen, in die Zukunft sehen, trägt unser Wahrscheinlichkeitsansatz den Beinamen prognostisch. Und weil wir uns bei allen Wahrscheinlichkeitsangaben nie ganz sicher sind, haben sie hypothetischen Charakter. Zusammengenommen handelt es sich somit um einen *hypothetisch-prognostischen* Ansatz, der die Sicht der beurteilenden Statistik, die den Begriff der Hypothese braucht, sehr schülernah vorbereitet. Er *umfasst* den Laplace‘schen Ansatz mit der griffigen Definition

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$$

als Spezialfall. Selbstverständlich lassen sich auch hiermit kognitiv höchst aktivierende Unterrichtsstunden gestalten. Der Verdienst der Laplace-Versuche besteht vor allem aber auch darin, dass sie in Kombination mit Boxplots eine ideale Grundlage für die quantitative Erforschung von Zufallsschwankungen bilden. Man nutzt die Länge der Box (die Quartildifferenz), um die Zufallsstreuung relativer Häufigkeiten zu messen und entdeckt, dass sie sich halbieren, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht. Ab Klasse 9 lassen sich die Entdeckungen als Naturgesetz ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ – Gesetz) formulieren. Dieses Gesetz eignet sich ab Klasse 9 ausgezeichnet für einen präformalen Einstieg in Grundvorstellungen beurteilender Statistik. Es lässt sich in der Sekundarstufe II mithilfe der Binomialverteilung und der Sigmaregeln absichern. Und wenn man den Vorzeichentest (etwa zur Prüfung des Medians) zum Unterrichtsgegenstand macht, verstummt auch die letzte Klage darüber, dass Laplace-Wahrscheinlichkeiten ins Reich der Würfelbudenmathematik gehören und jenseits von Glücksspielen im Alltag nicht vorkommen (vgl. Riemer 2023).

12 Resümee

Der folgende Dialog (Voigt 1983 S. 24) der sich auf der Grundlage der frequentistischen Interpretation des objektiven Wahrscheinlichkeitsansatzes aus Abb. 10 in Klasse 8 eines Gymnasiums in der 2. Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung abspielte, dient uns als Resümee. Vorausgegangen war eine Stunde zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten.

An der Tafel stehen kumulierte relative Häufigkeiten für das Ereignis „Rückenlage“ beim Werfen einer Reißzwecke.

01 Lehrer: "54%, 60%, 54%, 51%, 55%, 60% ... Sind das Wahrscheinlichkeiten?“
02 Schüler: "weiß nicht".
03 Lehrer: "Was sind denn das für Dinger?"
04 Schüler: "Wahrscheinlichkeiten."
Einige Minuten später...
05 Marco: "Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab."
06 Lehrer: "Die Wahrscheinlichkeit hängt nicht so sehr vom Zufall ab. Die Versuchsausgänge hängen vom Zufall ab."
07 Lehrer: „Was hat jetzt die relative Häufigkeit mit Wahrscheinlichkeit zu tun?“
08 Schüler: Erklärt, wie man die relative Häufigkeit ausrechnet.
09 Lehrer: "ja, aber ist jetzt Wahrscheinlichkeit dasselbe wie relative Häufigkeit?"
10 Stefan: „Ich würde sagen ja. Von der Herkunft würde ich sagen ja. Nur relative Häufigkeit ist im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit ungenauer."
12 Lehrer: (deutet auf eine relative Häufigkeit): "Bist du denn sicher, dass das die richtige Wahrscheinlichkeit ist?“
13 Stefan: "Nein. Die kann man gar nicht feststellen."
14 Lehrer: "Die kann man gar nicht feststellen. So etwas gibt es, aber feststellen können wir sie nicht. Was können wir machen für die Wahrscheinlichkeit?“
15 Stefan: "überhaupt nichts."

Abb. 17: Dialog

Marcos Bemerkung in Zeile 05 „Die Wahrscheinlichkeit hängt von Zufall ab“ hat schon fast philoso-

phische Tiefe: Das Modell, das wir uns vom Verhalten der Zwecke machen, hängt tatsächlich (genau wie später das Konfidenzintervall) vom Zufall ab, von dem nämlich, was wir zuvor erlebt haben, ganz nach dem Motto dieses Beitrags „Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird“. Das passt aber nicht zum Weltbild des Lehrers, der in Zeile 06 Wahrscheinlichkeit als eine objektiv existierende Größe begreift nicht als vom Menschen gemachtes Modell der Wirklichkeit. Deswegen wünscht er sich als Antwort auf seine Frage in Zeile 14 (vergeblich) die Antwort: „Man kann die Wahrscheinlichkeit nur schätzen.“
Wenn man versucht, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten zu „definieren“, verflucht man insgeheim den Zufall und damit den Kern der Stochastik.

13 Kurz und knackig

Für Schülerinnen und Schüler ist es - genau wie für alle andern Menschen - letztendlich egal, ob Wahrscheinlichkeiten tatsächlich objektiv und eindeutig existieren oder nicht, weil man sie eh nicht experimentell bestimmen kann. Sie erleben, dass man Wahrscheinlichkeiten unter Rückgriff auf Erfahrungen irgendwie festlegen muss, um mit ihnen rechnen und die berechneten für sinnvolle Prognosen nutzen zu können. Und wenn sich alle Beteiligten beim Festlegen einig sind, handelt es sich meist um Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Aber auch, wenn sich alle einig sind, kann man ganz schön daneben liegen, wie die Bleistifte zeigen. Das gilt auch für die grünen mit der silbernen Schrift, die ganz teuren!

Literatur

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2007): Elementare Stochastik, 2. Auflage. Berlin: Springer Verlag.

Humenberger, H. (2019): Der „empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff“ – gut gemeint, aber auch wirklich gut? Stochastik in der Schule 39, S. 17–19.

Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, C. (2015): Didaktik der Stochastik in der Sek. I. Berlin. Springer-Verlag.

Pallack, A. (2019): Fundamente der Mathematik 7 NRW, Gymnasium. Berlin: Cornelsen Verlag.

Riemer, W. (2023): Statistik unterrichten. Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Hannover: Friedrich|Kallmeyer Verlag.

Riemer, W.; Seebach, G. (2011): Bleistiftrollen: Beurteilende Statistik im Federmäppchen. In: Kaenders, R., Schmidt, R.: Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.

Voigt, J. (1983): Transskripte zum Projekt Routinen im Mathematikunterricht. IDM Materialien und Studien 33.

Weitere Materialien finden sich unter www.riemer-koeln.de. Hier sind auch die Quader, die Stifte und die Glücksräder auf der schiefen Ebene erhältlich.

Anschrift des Verfassers

Wolfgang Riemer
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
statistik@riemer-koeln.de

[1] Mit Humenberger (2019) verzichten wir darauf, frequentistische Wahrscheinlichkeiten als empirisch zu bezeichnen.

[2] Dieser Artikel verschriftlicht einem Vortrag, gehalten auf der Jubiläumstagung des AK Stochastik der GDM im Dezember 2022 an der Reinhardwaldschule in Fuldatal. Herrn Dr. Christian Fahse (Uni Landau) danke ich für einen intensiven Gedankenaustausch, den beiden Gutachtern für wertvolle Hinweise.

[3] Da die Binomialverteilung genutzt wird, betrachtet man hier nur eine der sechs Bleistiftseiten. Quelle leicht gekürzt: https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe2/stochastik/testen/zweiseitigertest.pdf (03.04.2023). Bezeichnend ist: Die Aufschrift www.mathematik-bw wurde ins Foto nur hineinkopiert. Die Aufgabe enthält keine Anregung für eigene Experimente.

[4] (https://www.youtube.com/watch?v=55Q92wc23nE)

[5] Man kann auch nach „Wahrscheinlichkeiten“ fragen, aber Kinder (und Anglisten) verwenden „Chance“ und Wahrscheinlichkeit synonym. Das Signal „in Prozent“ signalisiert, dass es sich hier nicht um ein Chancenverhältnis handelt. Eine 80%ige Chance bedeutet für sie: Man steht in der Nähe von „sicher“ - auf der Position 8 einer zehnstufigen Wahrscheinlichkeitsskala. Das entspricht dem Chancenverhältnis (engl. odds) 8 zu 2.

[6] Auf einer Tagung wurde dieser Gedanke kürzlich als „die Entdeckung des missing link zwischen Primar- und Sekundarstufenstochastik“ bezeichnet.

[7] Und Dorothée, die als Theologin mit Brüchen vertraut ist, verknüpfte in Abschnitt 1 die subjektive Wahrscheinlichkeit 1/6 bei 120 Versuchen mit der erwarteten Häufigkeit 20.

[8] Unsere Antwort auf diese höchst relevante Frage steht in den Abschnitte 1-8.

[9] die man - wenn man der Platonischen Sicht auf Wahrscheinlichkeit bevorzugt - später im Sinne der beurteilenden Statistik auch als Hypothesen über die wahre Wahrscheinlichkeiten deuten kann, aber nicht deuten muss.