mathematik lehren

Wolfgang Riemer

Statistik unterrichten

Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik

Klett
Kallmeyer

Download-Material

Vorwort

„A telephone Book is useful, but has no educational value.
Many textbooks are telephone books of facts, ergo …“
(Mortimer Jerome Adler)

Wir haben die fachlichen Grundlagen durchgearbeitet und

- kennen den Unterschied zwischen Ergebnis und Ereignis,
- wissen, dass Zufallsvariablen „in Wirklichkeit“ keine Variablen, sondern Abbildungen $P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sind, die z. B. beim Wurf von drei Münzen dem Ereignis {(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)} die Trefferzahl 2 zuordnen,
- haben von subjektivistischen, laplace'schen und frequentistischen Wahrscheinlichkeiten gehört (wobei letztere mitunter auch als statistische oder empirische bezeichnet werden),
- haben uns bei Signifikanztests über verbeulte Münzen und Fishers Tea tasting Lady informiert, die behauptete, schmecken zu können, ob der Zucker vor oder nach dem Eingießen des Tees hinzugefügt wurde usw. …

Aber wie gestaltet man auf der Grundlage dieses Hintergrundwissens funktionierenden Unterricht?

Mit dieser Frage ist zu rechnen, wenn nicht nur angehende Lehrerinnen und Lehrer Stochastik unterrichten müssen. Und: Ist diese Frage nicht naheliegend, wenn man bedenkt, dass auch so manch ein didaktisch ausgerichtetes Lehrwerk an ein „telephone book of facts“ erinnert, wenn es sich mit einer strikten Trennung von beschreibender Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik mehr an der Hochschulsystematik orientiert als am Erkenntnisinteresse neugieriger Kinder und junger Erwachsener?

Hier möchte „Statistik *unterrichten* – eine *handlungsorientierte* Didaktik der Stochastik“ eine Lücke schließen, vielleicht auch einen Kontrapunkt setzen: *Unterrichten* ist ebenso essenzieller Bestandteil dieses Buches wie *Handlungsorientierung*:

- Schülerinnen und Schüler stehen mit ihren Primärerfahrungen, ihrer Neugier und ihren Alltagsintuitionen im Mittelpunkt,
- interessante Fragestellungen werden durch aufschlussreiche, vor allem aber in einer Unterrichtsstunde realisierbare Experimente beantwortet,
- die Experimente unterstützen Begriffsbildungen nicht nur, sie verankern die Begriffe und Zusammenhänge im Erfahrungshorizont der Lernenden,
- wir fassen Wahrscheinlichkeiten weniger als objektiv existierende (?) Größen auf, sondern lassen sie die Lernenden als vom Menschen gemachte Modelle der Wirklichkeit erleben.

- Dadurch gelingt der nahtlose Anschluss an intuitive Vorstellungen aus der Grundschule und dem Lebensalltag. Darüber hinaus wachsen die meist säuberlich voneinander getrennten Gebiete beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende (!) Statistik schon in der Sekundarstufe I zu einer Einheit zusammen.

Um auch Lehrerinnen und Lehrer mit wenig stochastischer Vorerfahrung für Statistik zu begeistern, bevorzugen wir in diesem Buch eine tendenziell informelle Notation, wie sie in Schulbüchern gepflegt wird. Aber auch, wer in seiner Unterrichtskultur der Eleganz formaler Darstellungen einen höheren Stellenwert beimisst, wird die hier angebotenen Fragestellungen und Experimente wertschätzen. Denn das Bild von Mathematik, das wir unseren Schülerinnen und Schülern vermitteln, wandelt sich fundamental ins Positive, wenn wir im Unterricht, statt über fiktiv verbeulte Münzen aus imaginären Schatzkisten nur zu sprechen, über normierte flache Legosteine (wir nennen sie Legomünzen) erst spekulieren, um anschließend die Spekulationen an der Realität experimentell zu prüfen – oder wenn wir Fischers Tea tasting Lady durch reale Experimente ersetzen.

Das Buch ist modular aufgebaut. Die Kapitel oder je nach interessierender Klassenstufe auch Teile daraus lassen sich trotz vieler Vernetzungen unabhängig voneinander lesen und im Unterricht einsetzen. Sie sind Grundlage gelingender und erkenntnisreicher Unterrichtsstunden, an die sich Ihre Schülerinnen und Schüler auch lange nach der Schulzeit gerne erinnern.

Köln, im August 2023
Wolfgang Riemer

2 Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird

Darum geht es – das Wichtigste in Stichworten

- Schon in der Primarstufe werden subjektive Sicherheiten auf Skalen markiert. Diese Skalen zwischen unmöglich und sicher begleiten uns durch das ganze Leben.
- Mit Verfügbarkeit des Prozentbegriffs bekommen die subjektiven Sicherheiten nur durch die Normierung der Skalenenden 0 % und 100 % prognostischen Charakter, denn zu jeder Markierung gehört dann ein Prozentsatz und mit jedem Prozentsatz ist bei vorgegebenem Stichprobenumfang ein Prozentwert verbunden: die erwartete Häufigkeit.
- Durch Spekulieren und Experimentieren mit teilsymmetrischen Objekten bildet sich ein auch für die beurteilende Statistik tragfähiger prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, der auf Grundlage subjektivistischer Vorstellungen sowohl den Laplace'schen wie auch den frequentistischen umfasst.
- Wahrscheinlichkeiten werden erlebt als vom Menschen gemachte Modelle der Wirklichkeit, die einem Modellierungskreislauf unterliegen – und Lernende erleben, wie das Vertrauen in die Güte eines Modells vom Stichprobenumfang abhängt.
- Der für die beurteilende Statistik fundamentale Begriff des Konfidenzintervalls als eines Bereiches vertrauenswürdiger Modelle wird damit schon ab Klasse 7 intuitiv vorbereitet.
- Man erlebt, wie gut man über Pfad- und Summenregel mit prognostischen Wahrscheinlichkeiten rechnen und Vorhersagen machen kann. Und – das ist für Lernende zentral – die Prognosen lassen sich an der Realität überprüfen.

Experimente

- Mit Quadern „würfeln", Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufstellen und verbessern.
- Wahrscheinlichkeiten für Prognosen nutzen, Güte von Prognosen beurteilen.

2.1 Anknüpfen an alltägliche Vorerfahrungen

Im Alltag nutzen wir subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertungen, die auf Erfahrungen beruhen. Wie Abb. 2-1 belegt, werden sie in der Primarstufe auf einer Skala zwischen völlig unmöglich und ganz sicher lokalisiert.

Wenn Maike mehrmals mitbekommen hat, dass ihre Grundschullehrerin am letzten Schultag vor den Ferien ein Eis spendiert hat, wird sie sich auf der Skala nahe bei „ganz sicher“ (vielleicht bei 8 von 10) positionieren, wenn sie nach ihrer Einschätzung für den kommenden letzten Schultag befragt wird. Aus ihrer *Erfahrung* ist *Erwartung* geworden.

Die Kiewer Führung hält ein Eingreifen von Belarus an der Seite Russlands in den Krieg gegen die Ukraine aktuell für wenig wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass der belarussische Präsident Alexander Lukaschenko sich für eine Teilnahme am Krieg entscheide, liege „bei 15 bis 20 Prozent“, sagte der ukrainische Präsidentenberater Olexij Arestowitsch nach Angaben der Agentur Unian.

https://www.boerse-online.de/nachrichten/aktien/kein-sofortigeseingreifen-von-belarus-die-nacht-im-ueberblick-1031300215

Wie wahrscheinlich würden Sie SATURN aufgrund Ihrer letzten Erfahrung mit unserem Reparaturservice im SATURN-Markt Koeln 3 (Weiden) einem Freund, Bekannten oder Kollegen empfehlen?

sehr unwahrscheinlich										sehr wahrscheinlich
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

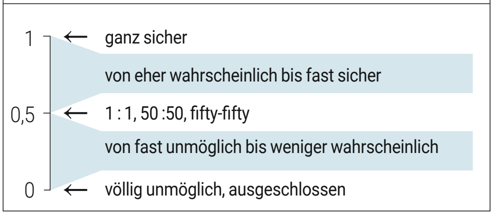


Abb. 2-1: a), b) subjektive Wahrscheinlichkeiten im Alltag und c) in der Primarstufe gemäß Krüger u. a. 2015.

Sobald Schülerinnen und Schüler mit dem Prozentbegriff vertraut sind, wird das untere Skalenende „völlig unmöglich“ vom Lehrer (!) mit 0 % und das obere „ganz sicher“ mit 100 % beschriftet. **Diese Beschriftung** ist ein Kunstgriff, dessen Genialität für die Begriffsbildung in der didaktischen Literatur bisher noch an keiner Stelle gesehen wurde.[3]

Nur durch die Beschriftung der Ränder erhält jede Stelle der Skala nämlich urplötzlich die Bedeutung eines Prozentsatzes. Und Siebtklässler wissen, dass bei festem Grundwert n zu jedem Prozentsatz p der Prozentwert n · p gehört. Bei reproduzierbaren Situationen ist n die Versuchszahl und n·p wird zur erwarteten Häufigkeit, kurz zum Erwartungswert, um den herum die Ergebnisse zufällig pendeln.

Damit wurde der qualitative subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff der Primarstufe quantitativ-prognostisch.

So wird die Stelle 25 % bei n = 300 Wiederholungen mit der erwarteten Häufigkeit 300 · 0.25 = 75 verknüpft. Sollte dann bei vielen 300er-Versuchen das fragliche Ergebnis immer wieder deutlich unter der Erwartung 75 liegen, korrigiert man die Angabe 25 % nach unten. Und damit hat man die Schlei-

3 Auf einer Fachdidaktik-Tagung wurde dieser Gedanke kürzlich als „die Entdeckung des missing link zwischen Primar- und Sekundarstufenstochastik“ bezeichnet.

fe eines Modellbildungskreislaufs durchlaufen. *Die Erfahrung hat die Erwartung modifiziert* (oder ggf. auch abgesichert).

2.2 Prognostische Wahrscheinlichkeiten

Abb. 2-2: Quader 1.3 × 2 × 2.3 cm³

Wie gut dieser Übergang vom qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff der Primarstufe zum quantitativ-prognostischen der Sekundarstufe im Rahmen eines Modellierungskreislaufs gelingt und welche Bedeutung dem didaktischen Dreisatz, Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren, vgl. 1.3 (5) zukommt, zeigt die folgende Unterrichtsskizze, in der mit Quadern „gewürfelt“ wird.

2.2.1 Spekulieren (Schritt 1)

Nach einem Kopfrechentraining zur Prozentrechnung erhält jeder einen Quader, dessen Seiten so beschriftet sind, dass sich die Augenzahlen der Gegenseiten zu 7 addieren – wie bei einem Spielwürfel.

Impuls: „Schaut euch die Quader genau an und schätzt nach Bauchgefühl die Chancen der sechs Augenzahlen in Prozent[4]. Nicht würfeln, nur schätzen! Ungefähr!“

Durch das Würfelverbot werden die Lernenden bewusst gezwungen, beim Formulieren ihrer Erwartungen auf ihre Alltagserfahrungen (wie: hochkant stehende Pakete stehen instabil, sie fallen schnell um) zurückzugreifen und auf der Modellebene zu arbeiten.

Reaktion: Die Lernenden akzeptieren das Würfelverbot, kneifen schätzend Augen zusammen, messen ggf. Kantenlängen, tuscheln miteinander und nennen bereitwillig „Prozentzahlen“, die Positionen auf den Grundschuls-

4 Man kann auch nach „Wahrscheinlichkeiten“ fragen, aber Kinder (und Anglisten) verwenden „Chance“ und Wahrscheinlichkeit synonym. Eine 80 %ige Chance bedeutet für sie: Man steht auf der Wahrscheinlichkeitsskala der Nähe von „sicher“ – auf der Position 8 einer zehnstufigen Skala. Das entspricht dem Chancenverhältnis (engl. odds) 8 zu 2.

kalen entsprechen und von denen man einige wie in Abb. 2-3 festhält. Dabei beachten die Schülerinnen und Schüler intuitiv
- zu Gegenseiten gehören gleiche Chancen (Symmetrieerfahrung),
- große Seitenflächen haben große Chancen (weil sie stabil liegen),
- alle Chancen addieren sich zu 100 % (intrinsisch mit dem Prozentbegriff verknüpft).

Würfeln mit Quadern: Schätzungen vor dem Experiment

	1	2	3	4	5	6	Summe	Vertrauen
Rene	10 %	5 %	35 %	35 %	5 %	10 %	100 %	30 %
Stefan	15 %	10 %	25 %	25 %	10 %	15 %	100 %	10 %
Alexa	10 %	12 %	35 %	20 %	15 %	8 %	100 %	0 %
Johanna	15 %	15 %	20 %	20 %	15 %	15 %	100 %	0 %
Jasmin	15 %	5 %	30 %	30 %	5 %	15 %	100 %	50 %
Fläche in cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
Fläche in %	14.7 %	12.8 %	22.6 %	22.6 %	12.8 %	14.7 %	100 %	10 %

Abb. 2-3: Schätzungen einer Klasse 7 nach Bauchgefühl, Proportionalitätshypothese und die Ergebnisse einer Abstimmung über das Vertrauen in die sechs Hypothesen. In der Sekundarstufe II ist das Vertrauen in die Proportionalitätshypothese meist größer, weil man allem traut, was man eindeutig berechnen kann.

Begriffsbildung: Das Missachten eines der drei Punkte führt zu fruchtbaren Diskussionen, in deren Verlauf Schülerinnen und Schülern der Unterschied zwischen **Modellebene** (Wahrscheinlichkeit, vor dem Versuch gefühlt und Teilsymmetrien widerspiegelnd) und **Realitätsebene** (Häufigkeit, **nach** einem Versuch ermittelt, nur annähernd teilsymmetrisch) bewusst wird. Hier stellte sich während der Diskussion heraus: Johanna hatte erst die Chancen für 1–6 und 3–4 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2–5 zu viel übrigbleibt; Alexandra dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen. Oft werden die Quader auch ausgemessen und die Wahrscheinlichkeit 100 % wird proportional zu den Flächen auf die Quaderseiten verteilt.

Man sollte den Stolz nicht unterschätzen, den Siebtklässler empfinden, wenn sie erfahren, dass sie in der Sprache der Berufsstatistiker soeben **Hypothesen** über das Verhalten der Quader aufgestellt haben und dass die Proportionalitätshypothese auch unter Mathematikern viele Freunde hat.

Glaubwürdigkeit: Die Diskussion wird abgeschlossen durch eine Abstimmung über die Glaubwürdigkeit der notierten Verteilungen.

Da es oft mehrere glaubwürdige Verteilungen gibt, kann man ggf. auch die Möglichkeit von Zweit- oder Drittstimmen einräumen (letzte Spalte in Abb. 2-3).

Dabei erleben die Schülerinnen und Schüler, dass Prozentskalen im Alltag auch ausdrücken, wie sehr man auf Aussagen vertraut – oder an die Brauchbarkeit von Modellen glaubt. So hält die Klasse Jasmins Hypothese mit 50 % Stimmen für plausibler als Stefans. Und die mühsam berechnete Proportionalitätshypothese scheint weniger glaubwürdig, weil die Wahrscheinlichkeiten der Seitenpaare 2–5 und 1–6 zu nahe beieinander liegen und für 3–4 zu wenig übrigbleibt. Man könnte von „**Vertrauens**wahrscheinlichkeiten“ sprechen, die versuchen, **Unsicherheiten** oder **Glaubwürdigkeit** zu beschreiben.

Name	1	2	3	4	5	6	
Patrick	10	6	28	41	4	11	100
Daniel	6	7	35	45	4	3	100
Binoy	7	4	37	34	1	17	100
Tobias	3	6	48	33	6	4	100
Michael	12	0	28	42	7	11	100
absolute Häufigkeit	38	23	176	195	22	46	500
relative Häufigkeit in %	7.6	4.6	35.2	39	4.4	9.2	100
Modell Gruppe 1 in %	8	4.5	37.5	37.5	4.5	8	100
Paula	11	6	34	32	7	10	100
Elaine	14	10	28	24	9	15	100
Marie	4	6	41	32	11	6	100
Marga	10	6	34	29	7	14	100
Sandra	7	4	30	37	4	18	100
absolute Häufigkeit	46	32	167	154	38	63	500
relative Häufigkeit in %	9.2	6.4	33.4	30.8	7.6	12.6	100
Modell Gruppe 2 in %	10	8	32	32	8	10	100
Hares	8	5	38	35	5	9	100
Edris	8	7	26	41	8	10	100
Christian	11	7	30	30	7	15	100
Sineat	8	12	36	29	7	8	100
Alice	13	5	34	31	9	8	100
absolute Häufigkeit	48	36	164	166	36	50	500
relative Häufigkeit in %	9.6	7.2	32.8	33.2	7.2	10	100
Modell Gruppe 3 in %	10	7	33	33	7	10	100
Carsten	10	12	32	29	5	12	100
Franca	9	12	34	25	10	10	100
Anka	12	9	21	38	13	7	100
Jenni	17	6	24	30	14	9	100
Kathi	11	8	23	34	11	13	100
absolute Häufigkeit	59	47	134	156	53	51	500
relative Häufigkeit in %	11.8	9.4	26.8	31.2	10.6	10.2	100
Modell Gruppe 4 in %	11	10	29	29	10	11	100
Ursula	11	7	29	31	11	11	100
Thomas	14	15	31	22	7	11	100
Björn	19	10	24	24	8	15	100
Ute	11	8	29	28	8	16	100
Annette	8	11	30	33	8	10	100
absolute Häufigkeit	63	51	143	138	42	63	500
relative Häufigkeit in %	12.6	10.2	28.6	27.6	8.4	12.6	100
Modell Gruppe 5 in %	13	9	28	28	9	13	100
Ines	13	10	23	36	6	12	100
Jessi	12	8	27	38	7	8	100
absolute Häufigkeit	25	18	50	74	13	20	200
relative Häufigkeit in %	12.5	9	25	37	6.5	10	100
Modell Gruppe 6 in %	11	8	31	31	8	11	100
alle zusammen	279	207	834	883	204	293	2700
relative Häufigkeit in %	10.3	7.7	30.9	32.7	7.6	10.9	100
Modell A in %	11	8	31	31	8	11	100
Modell B in %	10.5	8.0	31.5	31.5	8.0	10.5	100
Proportionalitätsmodell: Kanten (cm)				2.3	2	1.3	
Fläche in cm²	2.99	2.60	4.60	4.60	2.60	2.99	20.38
Fläche in %	14.7	12.8	22.6	22.6	12.8	14.7	100

Abb. 2-4: Versuchsergebnisse und drei Modelle (quader.xlsx)

Sie sagen aber keine relativen Häufigkeiten voraus und sind durch Experimente nicht überprüfbar. Es handelt sich um die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die man nach H. Dinges braucht, um später den Sinn der Bayes'schen Regel zu erfassen und ebenso, um Fehlinterpretationen der Ergebnisse von Signifikanztests „kontern" zu können.

Die Quader bieten schon vor dem Experimentieren wegen der Vielzahl plausibler Hypothesen Gelegenheit, dieses subjektive Vertrauen bewusst von den prognostischen Wahrscheinlichkeiten, die zu den sechs Quaderseiten gehören, abzugrenzen. Das unterscheidet die Quader von den Würfeln, bei denen es aus Gründen der Symmetrie nur eine sinnvolle Hypothese gibt, an die alle „ganz fest" glauben. Das unterscheidet sie auch von den unsymmetrischen Reißzwecken, für die es gar keine Hypothesen gibt.

2.2.2 Experimentieren (Schritt 2)

Nach der bewusst eingebauten Phase des Spekulierens erwartet man das Experiment mit Spannung: Jeder würfelt 100-mal, sodass die absoluten sofort auch als relative Häufigkeiten gelesen werden können. Die Ergebnisse werden wie in Abb. 2-4 in 5er-Gruppen samt revidierter Wahrscheinlichkeitsverteilungen in eine gemeinsame Tabelle eingetragen, ggf. auch langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert.

2.2.3 Reflektieren (Schritt 3)

Das verlangsamende Mitschreiben hat den Vorteil, dass Zufallsschwankungen (vgl. die 48 Dreier bei Tobias) noch bewusster wahrgenommen werden und

- man erlebt, dass sich die Zufallsschwankungen der relativen Häufigkeiten durch das Kumulieren in Gruppen verkleinern, aber nie verschwinden und dass die Modelle (die verbesserten Wahrscheinlichkeitsverteilungen) aller Gruppen die Teilsymmetrien der Quader widerspiegeln.

Nach dem Zusammenfassen der Häufigkeiten aller Gruppen einigt man sich im Plenum auf eine oder mehrere nahe beieinander liegende Wahrscheinlichkeitsverteilungen, in die man sehr viel mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem hohlen Bauch heraus aufgestellten", vgl. hierzu die Modelle A und B in Abb. 2-4.

- Man erlebt, dass sie durch weitere Versuche evtl. noch ein bisschen verbessert werden können, wobei sich die kleinen Verbesserungen dann aber als vergleichsweise irrelevant herausstellen.

Das fasst man fürs Regelheft wie folgt zusammen:

- Bei Zufallsexperimenten kann man einzelne Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann ihnen aber Wahrscheinlichkeiten zuordnen, die zusammen 100 % ergeben.
- Dabei beachtet man Erfahrungen aus zurückliegenden Versuchen und Symmetrien.
- Die Wahrscheinlichkeiten drücken aus, wo in etwa die relativen Häufigkeiten liegen werden, die man erwartet.
- Je mehr Erfahrungen zugrunde liegen, desto größer das Vertrauen in die aufgestellten Wahrscheinlichkeiten.

Realitätsebene	Modellebene
$h_1 + \cdots + h_n = 100\,\%$	$p_1 + \cdots + p_n = 100\,\%$
relative Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten
leben im Becher	leben im Kopf
schauen zurück	schauen nach vorne
schwanken zufällig	werden festgelegt, bezweifelt, verbessert
Im Fall von Teilsymmetrien	
ungefähr gleich	genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \cdots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_n \cdot p_n$
Standardabw. (empirisch) $s = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 h_i}$	Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 p_i}$

Abb. 2-5: Regelhefteintrag mit präziser Abgrenzung der Realitäts- von der Modellebene

Teilsymmetrische Objekte wie Quader haben gegenüber *vollsymmetrischen* Würfeln und *unsymmetrischen* Reißzwecken bei der Begriffsbildung den gewaltigen Vorteil, dass sie den Unterschied zwischen Modell- und Realitätsebene plakativ greifbar machen (vgl. Abb. 2-5):

- Wahrscheinlichkeiten spiegeln auf der Modellebene die Teilsymmetrien wider, Häufigkeiten nur näherungsweise – und es gibt *verschiedene* Modelle.
- Bei Spielwürfeln verschwindet der hypothetische Aspekt, weil nur die Gleichverteilung ein sinnvolles Modell darstellt – es gibt *nur ein* Modell – und
- bei völlig unsymmetrischen Objekten wie Reißzwecken, Knöpfen oder den beim Würfelspiel „Schweinerei“ verwendeten Schweinewürfeln fallen Realitätsebene und Modellebene in der Vorstellungswelt der Lernenden sehr schnell zusammen, weil man einer konkreten Verteilung nicht ansieht, ob es sich um relative Häufigkeiten nach einem Versuch handelt oder um Wahrscheinlichkeiten, die Vorhersagen machen wollen.

2.3 Die Reißzwecke trifft Lord Voldemord

Der folgende Dialog (Voigt 1983, S. 24) belegt das eindrucksvoll: Er fand in der 8. Klasse eines Gymnasiums in der 2. Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung statt. Vorausgegangen war eine Stunde zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten. An der Tafel stehen kumulierte relative Häufigkeiten für das Ereignis „Rückenlage“ beim Werfen einer Reißzwecke.

01 Lehrer: „54 %, 60 %, 54 %, 51 %, 55 %, 60 % … Sind das Wahrscheinlichkeiten?“
02 Schüler: „Weiß nicht.“
03 Lehrer: „Was sind denn das für Dinger?“
04 Schüler: „Wahrscheinlichkeiten.“

Einige Minuten später …

05 Marco: „Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab.“
06 Lehrer: „Die Wahrscheinlichkeit hängt nicht so sehr vom Zufall ab. Die Versuchsausgänge hängen vom Zufall ab.“
07 Lehrer: „Was hat jetzt die relative Häufigkeit mit Wahrscheinlichkeit zu tun?“
08 Schüler: Erklärt, wie man die relative Häufigkeit ausrechnet.
09 Lehrer: „Ja, aber ist jetzt Wahrscheinlichkeit dasselbe wie relative Häufigkeit?“
10 Stefan: „Ich würde sagen ja. Von der Herkunft würde ich sagen ja. Nur relative Häufigkeit ist im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit ungenauer.“
12 Lehrer: (deutet auf eine relative Häufigkeit): „Bist du denn sicher, dass das die richtige Wahrscheinlichkeit ist?“
13 Stefan: „Nein. Die kann man gar nicht feststellen.“
14 Lehrer: „Die kann man gar nicht feststellen. So etwas gibt es, aber feststellen können wir sie nicht. Was können wir machen für die Wahrscheinlichkeit?“
15 Stefan: „Überhaupt nichts.“

Marcos Bemerkung in Zeile 05 „Die Wahrscheinlichkeit hängt von Zufall ab“ hat schon fast philosophische Tiefe: Das Modell, das wir uns vom Verhalten der Zwecke machen, hängt – tatsächlich (genau wie später das Konfidenzintervall) – vom Zufall ab, von dem nämlich, was wir zuvor erlebt haben: ganz nach dem Motto dieses Abschnitts: *Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird.* Das passt aber nicht zum Weltbild des Lehrers, der in Zeile 06 Wahrscheinlichkeit als eine objektiv existierende Größe begreift, nicht als Modell der Wirklichkeit. Deswegen wünscht er sich als Antwort auf seine Frage in Zeile 14 (vergeblich) die Antwort: „Man kann die Wahrscheinlichkeit nur schätzen“.

Wenn man versucht, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten zu „definieren“, verflucht man insgeheim den Zufall und damit den Kern der Stochastik. Jeder, der seine Klasse schon einmal lange Münzwurfserien hat durchführen lassen, kennt das Phänomen, das Freudenthal (1972) mit folgenden Zeilen umschrieb:

"The story about tossing a coin with the happy result of a fair distribution of heads and tails in the long run has been the custom for quite a long time. What is new about it, is that the story is dramatized and acted out – I mean, by the author of the textbook. Maybe even the teachers or the students are expected to try out this experiment – following the highly encouraging examples given by the textbook authors. The experiments reported in those textbooks attempt to prove the ‚empirical law of large numbers'. Notwithstanding their great diversity all of them show the essential features displayed by the relative frequencies, that is oscillation around, and a quick convergence towards, $\frac{1}{2}$. In general, after 100 trials the value $\frac{1}{2}$ is practically reached, though some of the more optimistic textbook authors promise this result after no more than 50 trials. In some trials series the quotient $\frac{1}{2}$ is suddenly reached at n = 100, but in the majority of examples the quotients have been approaching close to $\frac{1}{2}$ for a while before the 100th trial."

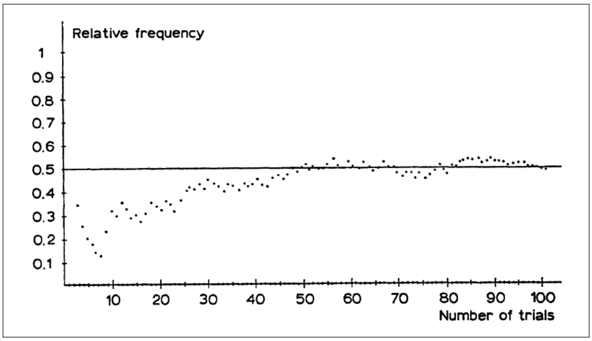


Abb. 2-6a: Wenn man Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten deutet, dann sind Zufallsschwankungen unerwünscht.

Folgende Zitate belegen die Probleme hinsichtlich der Begriffsbildung: Im ersten Zitat fallen relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zusammen, im zweiten wird Freudenthals 100er-Marke durch 300 ersetzt (Hervorhebungen durch den Autor) und im dritten geht es um unendliche Folgen …

Teste dein Wissen: Wie wird das Gesetz genannt, das folgenden Sachverhalt beschreibt: Wird ein Zufallsexperiment sehr viele Male wiederholt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. ***Diese relativen Häufigkeiten sind dann die Wahrscheinlichkeiten.***

Abb. 2-6b: Die Unterschiede zwischen Modell- und Wirklichkeitsebene verschwinden (http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/index.htm Rubrik: „Teste dein Wissen", Zugriff: 24.02.2023)

Wissen: Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Wenn ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt wird, dann stabilisiert sich die relative Häufigkeit der Ergebnisse ***um einen festen Wert*** P(A).
Dieser Wert heißt Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses A.
Bei 300 Würfen kannst du davon ausgehen, dass sich die berechnete relative Häufigkeit in der Nähe der Wahrscheinlichkeit ***stabilisiert hat.***

Abb. 2-6c: A. Pallack (Hrsg.) Fundamente der Mathematik 7 (G9) NRW 2019, S. 189

Definition: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die für eine gegen unendlich strebende Anzahl von Durchführungen des betreffenden Zufallsexperiments vorausgesagte relative Häufigkeit seines Eintretens.

Abb. 2-6d: https://www.mathe-online.at/mathint/lexikon/w.html (Zugriff: 24.02.2023)

J. K. Rowling definiert in ihren Harry-Potter-Bänden Lord Voldemort als „denjenigen, dessen Name nicht genannt werden darf“ oder als „Du weißt schon wer!“. Dokumentieren nicht die obigen Wissenskästen, wie sehr die frequentistische (statistische oder empirische) Wahrscheinlichkeit zum *Lord Voldemort der Stochastik* wird, zu derjenigen, „deren Wert nicht bestimmt werden kann“ oder als „Du weißt schon welche!“. Bei allem Respekt vor Magie: Wir setzen die Paradigmen (1)–(3) aus Abschnitt 1.3 und den Regelhefteintrag aus Abb. 2-5 dagegen.

2.4 Mit prognostischen Wahrscheinlichkeiten rechnen – Prognosen prüfen

Die Durchführung des Laplace-Experimentes „Hol die OMA aus der Socke“ (S. 14) ist lernpsychologisch deswegen so fruchtbar, weil Emotionen (Bauchgefühl) mit Mathematik (Abzählverfahren, Pfadregel, Erwartungswert) verknüpft und sinnstiftend im Erlebnishorizont der Schülerinnen und Schüler verankert werden. Würde man „die OMA“ Kindern als bloße Rechenaufgabe verkaufen, käme dieses Potenzial nicht zur Entfaltung. Gleiches gilt für die folgenden Nicht-Laplace-Experimente mit den Quadern, wobei gerade der modellierende (hypothetische) Charakter der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Horizonterweiterung beiträgt: Man erlebt (vgl. Abb. 2-7) die Abhängigkeit der berechneten Sekundärwahrscheinlichkeiten (unten: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Durchmarsch gelingt) von den angesetzten Primärwahrscheinlichkeiten

lichkeiten (den unterstellten Wahrscheinlichkeiten der Quaderseiten) und damit, wie gut man mit Modellen arbeiten und prognostizieren kann und wie wenig die Rechenergebnisse von den verwendeten Hypothesen abhängen.

Der Spannungsbogen schließt sich, wenn man die Prognosen (vgl. Abb. 2-7) durch erneutes Auszählen bereits vorhandener Urlisten (die Abb. 2-3 zugrunde liegen) an der Realität prüft: Die Modellrechnungen werden so validiert. Folgende Aufgaben dienen als Beispiele.

2.4.1 Durchmarsch (Pfadregel, Gegenwahrscheinlichkeit, Erwartungswert)

Wenn man einen Quader sechsmal hintereinander würfelt und beim ersten Wurf keine 1, beim zweiten keine 2, ... beim sechsten keine 6 erhält, ist ein „Durchmarsch“ gelungen. (Bei 2-6-4-3-1-3 gelingt der Durchmarsch, bei 6-2-3-4-1-3 scheitert er im dritten Wurf.)

Das mehrstufige Experiment entspricht von der Idee her und auch der praktischen Durchführung im Klassenraum, dem Ziehen der „OMA aus der Socke“, nur dass man hier nicht mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten arbeitet. Genau wie bei „OMA in der Socke“ sind die folgenden Fragen naheliegend:

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt ein Durchmarsch? Tipp: Verwende zur Beschreibung des Quaders Modell A aus Abb. 2-4, das sich in Zeile 2 von Abb. 2-7 wiederfindet.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheitert der Durchmarsch im ersten, im zweiten, ... oder (das ist dann höchst frustrierend) sogar noch im sechsten Wurf?

(c) Die Anzahl der Würfe, die man für einen gescheiterten oder geglückten Durchmarschversuch braucht, liegt zwischen 1 und 6. Man bezeichnet sie als Spieldauer. Bestimme mit (a) und (b), wie lange ein Durchmarschversuch im Mittel dauern wird. Man spricht von der erwarteten Spieldauer T.

(d) Welchen Gewinn erwartet man, wenn es bei einem gelungenen Durchmarschversuch 20 Punkte gibt, bei einem im sechsten Wurf gescheiterten Versuch immerhin noch 5 Punkte, bei einem im fünften Versuch gescheiterten Versuch 4 Punkte usw.?

(e) Kontrolliere deine Rechenergebnisse durch einen Vergleich mit den Angaben aus Zeile 8 von Abb. 2-7.

I8 | =Summe(B$7:H$7 B8:H8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Augenzahl	1	2	3	4	5	6			
2	Becher	0.11	0.08	0.31	0.31	0.08	0.11			
3	freier Fall	0.08	0.04	0.38	0.38	0.04	0.08			
4	Würfel	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167			
5		scheitern	nach					Durchmarsch		
6	Versuchsdauer	1	2	3	4	5	6	6	erwarteter	erwartete
7	Gewinn	0	1	2	3	4	5	20	Gewinn	Dauer
8	Becher	0.11	0.071	0.254	0.175	0.031	0.039	0.319	7.81	0.11
9	freier Fall	0.08	0.037	0.336	0.208	0.014	0.026	0.3	7.514	7.514
10	Würfel	0.167	0.139	0.116	0.096	0.08	0.067	0.335	8.014	8.014

Abb. 2-7: Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte zum Durchmarschproblem – berechnet auf Grundlage zuvor aufgestellter Primärwahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Wurftechniken

(f) Abb. 2-7 beantwortet in den Zeilen 10 und 9 obige Fragen auch für einen Würfel und einen Quader, den man, ohne einen Würfelbecher zu stülpen, frei auf einen Tisch fallen lässt. (Er wird durch Zeile 3 beschrieben.) Vergleiche die Ergebnisse und kommentiere.

Hannah möchte die Prognosen aus (a)–(d) in der Praxis prüfen: Sie deutet dazu das Protokoll ihrer 100 Quaderwürfelergebnisse (Abb. 2-8) als eine Folge von Durchmarsch-Experimenten: Dazu betrachtet sie die gewürfelten Augenzahlen nacheinander und hält durch farbiges Markieren in ihrer 10×10 Urliste fest, ob der Durchmarsch nach sechs Schritten gelang bzw. im wievielten Schritt er scheiterte – und wie viele Punkte sie dabei bekam. Nach dem Scheitern oder dem Gelingen des Durchmarschs beginnt mit der nächsten gewürfelten Zahl direkt der nächste Versuch.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	4	4	3	2	3	5	4	3
2	1	5	3	3	4	3	3	6	usw.	
3										

Scheitern nach ... Schritten						gelungen
1	2	3	4	5	6	6
0 P	1 P	2 P	2 P	4 P	5 P	20 P
	|		|		|	|

Abb. 2-8: Jeder zählt seine Urliste der 100 Quaderwürfe, die Abb. 2-4 zugrunde liegt, erneut aus. Hier ist
- der erste Durchmarschversuch (gelb) an der Stelle 4,
- der zweite (blau) an der Stelle 2 gescheitert,
- der dritte Versuch gelang,
- der vierte scheiterte an der Stelle 6.

Wenn die Urliste zu Ende ist, bevor der letzte Durchmarschversuch abgeschlossen wurde, zählt der letzte Versuch nicht mit (oder man setzt ihn durch Würfeln bis zum Erfolg oder Scheitern fort).

(g) Zähle deine 100er-Urliste nach Hannahs Methode aus und prüfe damit die Vorhersagen aus (a) bis (d).

(h) Fasst die Ergebnisse eurer Klasse in einer gemeinsamen Tabelle zusammen und prüft erneut.

(i) Mirko behauptet: Aus 100 Würfen sollten sich nach Hannahs Methode etwa $\frac{100}{\mathrm{T}}$ Durchmarschversuche „schneidern“ lassen. Erläutere Mirkos Gedanken und vergleiche mit der Anzahl der Durchmarschversuche, die du aus deinen 100 Zahlen „schneidern“ konntest. Führt den Vergleich auch in der gesamten Klasse durch (quader.xls und quader.ggb können aus Auswertungsvorlagen genutzt werden).

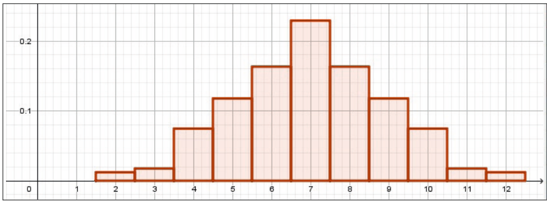
2.4.2 Augensummenverteilung (Pfadregel versus systematisches Abzählen)

(a) Die Augensumme 7 hat beim Wurf zweier Würfel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Alle anderen Augensummen sind unwahrscheinlicher. Begründe dies, indem du ohne Anwendung der Pfadregel alle möglichen Ergebnisse in einer Tabelle notierst.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Augensumme 7 beim zweifachen Wurf des Quaders und erläutere, warum hier ein Abzählverfahren versagt.

(c) Abb. 2-9 veranschaulicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme beim Wurf zweier Quader. Erläutert, wie man sie mithilfe der Tabelle erhält.

(d) Überprüft das Ergebnis durch Auszählen eurer z. B. 2700 Quaderwürfe, die ihr als 1350 Doppelwürfe deutet.



D3 =$B3 D$2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			1	2	3	4	5	6
2			0.11	0.08	0.31	0.31	0.08	0.11
3	1	0.11	0.012	0.009	0.034	0.034	0.009	0.012
4	2	0.08	0.009	0.006	0.025	0.025	0.006	0.009
5	3	0.31	0.034	0.025	0.096	0.096	0.025	0.034
6	4	0.31	0.034	0.025	0.096	0.096	0.025	0.034
7	5	0.08	0.009	0.006	0.025	0.025	0.006	0.009
8	6	0.11	0.012	0.009	0.034	0.034	0.009	0.012
9								

Abb. 2-9: Wahrscheinlichkeiten der 36 Augenzahlenpaare und die Verteilung der Augensummen beim Doppelwurf des Quaders (quader-doppelwurf.ggb)

2.4.3 Pfadregel in Kombination mit systematischem Abzählen

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- man bei zweimal Quadern einen Pasch (also zwei gleiche Zahlen) erhält,
- bei zweimal Quadern die zweite Zahl größer ist als die erste,
- bei viermal Quadern eine „kletternde" Folge (wie 2-4-5-6) entsteht,
- bei dreimal Quadern drei verschiedene Zahlen fallen.

(b) Entscheide, ob ein Laplace-Würfel höhere Wahrscheinlichkeiten für die genannten Ereignisse liefern würde.

(c) Zählt die Urlisten erneut aus und vergleicht die erhaltenen relativen Häufigkeiten mit den Prognosen.

2.5 Vertiefende Fragestellungen

2.5.1 Wurftechnik

Der Ansatz einer Proportionalität zwischen Wahrscheinlichkeit p(i) und dem Inhalt A(i)[5] der Seitenfläche i scheitert schon deswegen, weil die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Seitenflächen erheblich von der Wurftechnik (und auch der Unterlage) abhängen, also nicht alleine aus den Abmessungen bestimmt werden können. Deswegen werden alle Experimente normiert mit den gleichen Würfelbechern ausgeführt, die auf den glatten Tisch gestülpt werden. Durch den Becherrand werden die instabilen Lagen 2 und 5 im Vergleich zum freien Fall aus vorgegebener Höhe (Ellenbogen, 30 cm) tendenziell „gestützt". Noch unwahrscheinlicher werden die instabileren Lagen, wenn man die Quader mit etwas Schwung horizontal über den Tisch „rollen" lässt oder mit einem Teppich als Unterlage arbeitet. Durch arbeitsteiliges Experimentieren können diese Unterschiede (gleichsam nebenbei ohne zeitlichen Mehraufwand) zum Forschungsgegenstand werden.

2.5.2 Schwerpunkt

Wenn man bei unveränderten äußeren Abmessungen den Schwerpunkt des Quaders durch eine Nut zur Seite 3 hin verschiebt, wird die Gegenseite 4 wahrscheinlicher oben liegen. Ob diese Schwerpunktverlagerung die Wahrscheinlichkeiten der Seitenpaare 1-6 und 2-5 beeinflusst? Gute Forschungsfrage! Und wieder wird beschreibende Statistik durch das Aufstellen und

5 Dieser Ansatz entspricht einer umgekehrten Proportionalität zur Schwerpunkthöhe h(i) (und damit zur Lageenergie), da das Produkt aus Grundfläche und zugehöriger Schwerpunkthöhe das halbe Quadervolumen ergibt.

Prüfen von Hypothesen nach dem Dreisatz Spekulieren-Experimentieren-Reflektieren schon in Klasse 7 beurteilend!

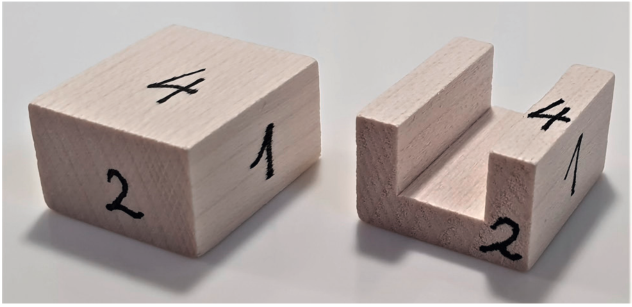


Abb. 2-10: Durch eine Nut wird der Quader „gezinkt".

2.5.3 Gibbs-Verteilung

In der Analysis macht man im Kontext der Exponentialfunktion Bekanntschaft mit der barometrischen Höhenformel, die den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe beschreibt.

Weil sich „oben", wo die Lageenergie der Luftpartikel höher ist als „unten", weniger Moleküle aufhalten, nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Partikel in einer hochenergetischen Lage befindet, exponentiell mit der Höhe ab.

Wenn man die barometrische Höhenformel auf die Quader überträgt, dann müsste die Wahrscheinlichkeit $p(i)$ der Lage i proportional sein zu $e^{-k \cdot h(i)}$, wobei h(i) die zur Seitenfläche i gehörige Schwerpunkthöhe (= halbe Quaderhöhe) ist. Zu jedem Wert des Parameters k erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (die Gibbs-Verteilung) dadurch, dass man die sechs Werte $e^{-k \cdot h(i)}$, i = 1 … 6 berechnet und dann (zwecks Normierung) durch deren Summe teilt. Wenn man anschließend k so wählt, dass die Abweichungen zwischen den erwarteten und den beobachteten Häufigkeiten minimal werden, erhält man ein Modell, das die beobachteten Häufigkeiten gut beschreibt. Für unterschiedliche Wurftechniken ergeben sich unterschiedliche Parameter k. Und auch für die U-Quader mit der Nut ist die Gibbs-Verteilung ein ausgezeichnetes Modell (Riemer, Stoyan & Obreschkow 2013).

kumuliert	1	2	3	4	5	6	
absolute Hfgk.	304	181	1443	1442	175	355	3900
relative Hfgk.	0.08	0.05	0.37	0.37	0.04	0.09	1
passendes Gibbs-Modell							
$k_{freierfall}$	4.18						
Schwerpunkthöhe h	1	1.15	0.65	0.65	1.15	1	
exp(-k*h)	0.02	0.01	0.07	0.07	0.01	0.02	0.18
Wahrschlichkeit	0.09	0.05	0.37	0.37	0.05	0.09	1
erw. Hfgk	333.56	178.32	1438....	1438....	178.32	333.56	
Abweichungen	2.62	0.04	0.02	0.01	0.06	1.45	4.14

kumuliert	1	2	3	4	5	6	
absolute Hfgk.	279	207	834	883	204	293	2700
relative Hfgk.	0.1	0.08	0.31	0.33	0.08	0.11	1
k_{Becher}	3.01						
Schwerpunkthöhe h	1	1.15	0.65	0.65	1.15	1	
exp(-k*h)	0.05	0.03	0.14	0.14	0.03	0.05	0.45
Wahrschlichkeit	0.11	0.07	0.32	0.32	0.07	0.11	1
erw. Hfgk	300.01	191.15	858.83	858.83	191.15	300.01	
Abweichungen	1.47	1.31	0.72	0.68	0.86	0.1	5.15

Abb. 2-11: Gibbs Verteilungen mit Parameter k = 4.18 (links) und k = 3.01 (rechts). Sie beschreibt das Verhalten des Quaders beim freien Fall (links) und beim Würfeln im Becher (rechts) gut (quader-gibbs.ggb).

2.6 Resümee

- Wahrscheinlichkeiten entstehen im Lebensalltag (qualitativ schon in der Grundschule) als mentale Modelle der Realität dadurch, dass aus Erfahrungen Erwartungen werden.
- Sie blicken in die Zukunft und wollen Vorhersagen machen.
- Wegen guter Erfahrungen mit Symmetrien und Proportionalitäten und schlechter mit der Schwerkraft (hochkant stehende Pakete fallen schnell um) formulieren Schülerinnen und Schüler plausible Erwartungen an das stochastische Verhalten von Quadern, die sie bei Verfügbarkeit des Prozentbegriffs problemlos quantifizieren. Sie formulieren teilsymmetrische subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich – sofern man deren Existenz unterstellt – als Hypothesen über „wahre“ Wahrscheinlichkeiten deuten lassen.
- Die Proportionalitätshypothese, die man als Verallgemeinerung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten deuten kann, zeigt, dass auch plausible Hypothesen unbrauchbar sein können und revidiert werden müssen: Aus neuen Erfahrungen werden neue Erwartungen!
- Je mehr Erfahrungen zugrunde liegen, desto größer wird das Vertrauen in die aufgestellten Wahrscheinlichkeiten. Der Übergang von den subjektiven Wahrscheinlichkeiten (auch die Laplace'schen gehören dazu) zu den frequentistischen Wahrscheinlichkeiten ist fließend: Wahrscheinlichkeiten, die man ohne Versuche hingeschrieben hat, wird man als subjektiv bezeichnen, auch solche, die man nach 10 Versuchen hingeschrieben hat. Steckt aber die Erfahrung aus 100 oder 1000 Versuchen dahinter, wird man sie als frequentistisch bezeichnen. Aber in dem Moment, in dem man sie notiert, handelt es sich um vom Menschen gesetzte Modelle, die den Kolmogoroff-Axiomen genügen.
- Lernende erleben, dass die Festlegung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung kein Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie ist, sondern das oft viel kompliziertere Problem darstellt, die Realität durch ein mathematisches Modell beschreiben zu müssen.

- Der Ansatz realisiert die Paradigmen (1) bis (5) aus Kapitel 1–3 ebenso idealtypisch wie er für Freudenthals realistische Mathematik steht, weil Begriffe nicht als Selbstzweck oder aus formallogischen Gründen eingeführt werden, sondern zur Strukturierung dessen dienen, was Kinder zuvor über konkrete Handlungen als Sinn stiftend erlebt haben.
- Es scheint, als würden wir mit dieser Sicht auf Wahrscheinlichkeit an seit Jahrzehnten nicht hinterfragten „Axiomen“ stochastischer Didaktik rütteln, die stellvertretend für viele andere Autoren Büchter & Henn (2007, S. 182) wie folgt formulieren:

> Wir gehen aus von der Existenz einer dem Zufallsexperiment innewohnenden objektiven Wahrscheinlichkeit, die wir durch verschiedene Ansätze wenigstens näherungsweise zu bestimmen versuchen.
> (a) Der Laplace-Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz a priori, d. h. vor Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments, rein aus der Vernunft gewonnen.
> (b) Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein empirischer Ansatz a posteriori, d. h. nach Durchführung des fraglichen Zufallsexperiments gewonnen.
> (c) Der subjektive Wahrscheinlichkeitsansatz ist ein theoretischer Ansatz, in dem häufig eigene Erfahrungen verankert sind.“

Statt Modell und Wirklichkeit gemäß unserem Paradigma (2) sauber („messerscharf“) voneinander zu trennen, werden hier „theoretische“ Ansätze (a), (c) von empirischen (b) abgegrenzt – und leider ist ausschließlich in (c) die Rede von eigenen Erfahrungen.

Wenn man aber Wahrscheinlichkeit weniger als eine dem Zufallsexperiment innewohnende objektive Größe, sondern, wie beim Quadern gemäß Abb. 2-4 erlebt, als vom Menschen gesetztes Modell begreift, dann kann man auf (nicht nur Schülerinnen und Schüler) frustrierende Vokabeln wie „versuchen“, „wenigstens“, „näherungsweise“ getrost verzichten.

Aber wir sind nicht allein mit unserer Skepsis gegenüber dem durch Büchter & Henn skizzierten Stochastik-didaktischen „State oft the Art“. So gibt auch T. Rolfes (Uni Frankfurt a. M.) im AK Stochastik der GDM 2022, also gut fünf Jahrzehnte nach H. Dinges (der auch an der Uni Frankfurt a. M. lehrte), zu bedenken:

- Die curricularen Vorgaben basieren bisher fast ausschließlich auf theoretischen Überlegungen.
- Die Bildungsstandards der Primarstufe und der Sekundarstufe sind bzgl. des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wenig abgestimmt.

- In der Klassenstufe 6/7 werden der klassische (Laplace'sche) und der frequentistische Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff isoliert voneinander unterrichtet.
- Ist die mangelnde Integration von klassischem und frequentistischem Zugang Ursache für Verständnisschwierigkeiten?
- Es stellt sich die Frage, wie die unterschiedlichen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff integrativ so unterrichtet werden können, dass intuitive Schülervorstellungen gewinnbringend in den Stochastikunterricht einfließen.

Das vorliegende Kapitel scheint uns insbesondere die letzte, die wichtigste aller didaktischen Fragen, überzeugend zu beantworten!

Wichtige GeoGebra-Befehle aus dem Bereich der Stochastik

Befehl	Erläuterung
nCr[n,k] n: Anzahl der Versuche; k: Anzahl der Treffer	Berechnung von $\binom{n}{k}$
Binomial [n, p] (p: Erfolgswahrscheinlichkeit)	erzeugt ein Balkendiagramm einer Binominalverteilung
Binomial [n, p, <Wahrheitswert Verteilungs-funktion>]	erzeugt ein Balkendiagramm einer Binomialverteilung, wenn der Wahrheitswert false ist; erzeugt ein Balkendiagramm einer kumulativen Binomialverteilung, wenn der Wahrheitswert true ist
Binomial [n, p, k, <Wahrheitswert Verteilungsfunktion>]	Sei X eine B(n; p)-Zufallsvariable. $P(X = k)$, wenn der Wahrheitswert false ist $P(X \leq k)$, wenn der Wahrheitswert true ist
Normal [Mittelwert, Standardabweichung, x]	erzeugt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung
Normal [Mittelwert, Standardabweichung, x, Wahrheitswert Verteilungsfunktion]	Ist der Wahrheitswert true, dann wird die kumulative Verteilungsfunkti-on erzeugt, ansonsten die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung.
InversNormal [<Mittelwert>, <Standardabweichung>, <Wahrscheinlich-keit>]	Es wird $\Phi^{-1}(p)\cdot\sigma + \mu$ berechnet. Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Mit diesem Befehl wird der Wert der $N(\mu; \sigma)$-verteilten Zufallsgröße X ermittelt, welche zu dem gegebenen p-Wert gehört.
Zufallszahl [<Minimalwert>, <Maximalwert>]	erzeugt eine ganzzahlige Zufallszahl zwischen Minimalwert und Maximalwert (einschließlich) Beispiel: Mit Zufallszahl [1,6] kann der Wurf mit einem normalen Würfel simuliert werden.
ZufallszahlBinomialverteilt [n, p]	Realisation (Anzahl der Treffer) einer binomialverteilten Zufallsgröße X n: Wiederholungen, p: Trefferwahrscheinlichkeit
ZufallszahlBinomialverteilt [n, p] / n	Realisation (Stichprobenanteil h) einer binomialverteilten Zufallsgröße n: Wiederholungen, p: Trefferwahrscheinlichkeit
ZufallszahlGleichverteilt [<Min>, <Max>]	erzeugt die Realisation einer gleichverteilten Zufallsgröße X in einem Bereich [Min, Max]
ZufallszahlNormalverteilt [<Mittelwert μ >, <Standardabweichung σ >]	erzeugt die Realisation einer normalverteilten Zufallsgröße $N(\mu, \sigma)$
Stichprobe [<Liste L>, <Größe n>, <Wahr-heitswert Wiederholung möglich>]	Erzeugt eine Liste mit n beliebig gewählten Elementen aus der Liste L. Wahrheitswert true: Die Elemente können mehrfach vorkommen (Ziehung mit Zurücklegen) Wahrheitswert false: Die Elemente können nur einfach vorkommen (Ziehung ohne Zurücklegen). Beispiel: Stichprobe [{1, 2, 3}, 3, false] erzeugt eine zufällige Permutation von {1, 2, 3}
Mittelwert [<Liste von Zahlen>]	Berechnung des Mittelwertes
Standardabweichung [<Liste von Zahlen>]	Berechnung der Standardabweichung
StichprobenStandardabweichung [<Liste von Zahlen>]	Berechnung der Stichprobenstandardabweichung
Stichprobenvarianz [<Liste von Zahlen>]	Stichprobenvarianz

Wolfgang Riemer ist Archimedes-Preisträger, Schulbuchautor, Fachleiter, Lehrbeauftragter, Erfinder der „Riemerwürfel“, der „Würfelbleistifte“ und des „Glücksrads auf der schiefen Ebene“.
Seit vielen Jahren baut er Brücken zwischen Schulalltag, Hochschuldidaktik, Lehrerbildung und Lehrplangestaltung.
Mit seinen Ideen hat er den Stochastikunterricht substanziell bereichert und nachhaltig zum Besseren verändert.

Statistik unterrichten ist eine erfrischend innovative Didaktik der Stochastik. Funktionierende Schulpraxis steht im Vordergrund, solide reflektierte Theorie dahinter. Auf der Grundlage eines umfassenden Wahrscheinlichkeitsbegriffs werden beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kerngedanken beurteilender Statistik von Anfang an spiralcurricular miteinander vernetzt. Dies gelingt – handlungsorientiert – durch spannende und schulalltagstaugliche Fallbeispiele, in deren Zentrum Kinder und Jugendliche mit ihren Alltagsintuitionen und ihrem Interesse an realistischen Fragen stehen. Ziel ist ein nachhaltiger, kognitiv aktivierender Unterricht: Begriffe werden über konkrete Inhalte gebildet, als sinnstiftend erlebt und Zusammenhänge entdeckt.
Der Band ist modular aufgebaut, die Kapitel lassen sich unabhängig voneinander lesen und werden durch wenige Paradigmen zusammengehalten:

- Pflege einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff.
- Trenne Modell und Realität messerscharf und konsequent.
- Untersuche Zufallsschwankungen statt sie wegzuwünschen.
- Stelle authentische Probleme ins Zentrum.
- Nutze den „didaktischen Dreisatz“ Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren.

Der Band richtet sich an Referendarinnen und Referandare sowie an Mathematik-Lehrkräfte beider Sekundarstufen, die spannende Unterrichtsstunden gestalten möchten, an die sich die Lernenden noch lange nach der Schulzeit mit Vergnügen erinnern.

978-3-7727-1748-7
9 783772 717487

Materialübersicht

Kapitel 1
oma.ggb

Kapitel 2
quader.xlsx
quader.ggb
quader-doppelwurf.ggb
quader-gibbs.ggb

Kapitel 3
zweifel-sortieren.ggb
bleistift-simulation.ggb
bleistift-simulation.xlsm

Kapitel 4
kopfmuenzeln-mit-simulation.ggb
gesetz-der-grossen-zahlen.ggb
nougat-10 g.ggb
baeren-10 g.ggb
elle-fuss.ggb
minuteschaetzen.ggb
signifikanztest-tool.ggb
treppensteigen.xlsx
haendefalten.xlsx
daumenpeilen.xlsx
strahlensatz.ggb
peilwinkel.ggb

Kapitel 5
prognose-konfidenzintervall-tool.ggb
wurzeltrichter-ellipse.ggb
konfidenzintervall-freirubbeln.ggb
legomuenze-dualitaet.ggb
loeffelstichprobe-dualitaet.ggb

Kapitel 6
faltung-rekursiv.ggb
faltung-rekursiv.xlsx
faltung-mit-erzeugender-funktion.ggb
zucker-loeffel.ggb
stoppuhr-wartezeiten.ggb

Kapitel 7
wuerfel-quader-lego.ggb
wuerfel-quader-lego-tabelle.ggb
drei-beutel.ggb
drei-beutel.xlsx
min-rot-max.ggb
min-rot-max.xls
hypergeo.ggb
infografik-antigentest.pdf

Kapitel 8
goldbaeren-gewichte-10 g.ggb
chance-risiko-sequentiell.ggb
chance-risiko.xlsx
chance-risiko.pdf
chance-risiko-funktional.ggb

Kapitel 9
schnippen.ggb
sinusdichte.ggb
sinusdichte-modellanpassung.ggb
schiefes-laplacesches-gluecksrad.ggb
gluecksrad-rutschend.ggb

Kapitel 10
10-DM.ggb
zuckerwuerfel.ggb
darts.ggb
darts-rotation.ggb
gauss-begruenden.pdf

Kapitel 11
loeffel-stichproben.xlsx
schuh-groessen-innenlaengen.xlsx
bleistiftrollen-bauchgefuehl-testgroessen.xlsx
koerpergroesse-schuhgroesse.xlsx
trendgeraden-schaetzen.ggb
lineares-modell-schrittweise-rekonstruieren.ggb
regression-simulation-linear.ggb
regression-simulation-exponntiell.ggb
normalverteilung-2D.ggb
vorschulkinder.xlsx
selbstkonzept.docx
selbstkonzept.xlsx

Das gesamte Materialpaket hat einen Umfang von 65 Arbeitsblättern/Materialien.

Weiterführende Materialien und Links zu den Unterrichtsbeispielen

zurück